УДК 530.1

Н.М. Кудряшова

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для систем дифференциальных уравнений с периодической правой частью исследован вопрос об устойчивости нулевого решения с помощью оценки нормы оператора монодромии.

система дифференциальных уравнений, устойчивость, оператор монодромии, норма матрицы.

Пусть дана система

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

для которой функция $\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$ – ω-периодическая по t, $\mathrm{f}(\mathrm{t}, 0_\mathrm{n}) \equiv 0_n$, $\mathrm{f}(\mathrm{t}, \mathrm{x})$, интегрируемая по t и достаточно гладкая по x в окрестности точки $x = 0_n$. При этом для системы (1) обеспечено условие существования и единственности решения $\mathrm{x}(\mathrm{t}, \mathrm{x}_0)$, $\mathrm{x}(0, \mathrm{x}_0) = x_0$ и его продолжительности при $t \in [0, \omega]$, если x_0 достаточно мало [1].

Задача. Для системы (1) найти условие устойчивости решения $x = 0_n$.

Для решения этой задачи используем свойство оператора монодромии (сдвига на период) $Ux_0 = x(\omega, x_0)$. Для него можно определить степени (итера-

войствам этих степеней решим вопрос об устойчивости. Для этого используем аналог леммы 9.1 [3].

Лемма 1. Пусть в некоторой окрестности точки $x = 0_n$ определены все степени $U^k x_0$, $k \in N$, и пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, для которого из условия $\|x_0\| < \delta$ следует оценка $\|U^k x_0\| < \varepsilon$, $k \in N$. Тогда решение $x = 0_n$ устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Будем считать числа ε и δ, определенные условием леммы такими, что решение $x(t, x(k\omega, x_0))$ продолжаемо, по крайней мере, на отрезок $[0, \omega]$ при всех $k \in N$.

В силу непрерывности решений рассматриваемой системы от начальных значений, для любого $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ можно считать таким, что $\delta \le \varepsilon$ и $\|\mathrm{x}(\tau, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $\tau \in [0, \omega)$, если $\|x_0\| < \delta$ [2]. Следовательно, с учетом группового свойства динамической системы для произвольного $t = k\omega + \tau$, $\tau \in [0, \omega)$, $k = [t/\omega]$ и при всех x_0, подчиненных неравенству $\|x_0\| < \delta$, получим оценку $\|\mathrm{x}(t, x_0)\| = \|x(\tau, x(k\omega, x_0))\| < \varepsilon$.

Таким образом, решение $x = 0_n$ устойчиво. Лемма доказана.

Лемма 2. Если в условиях леммы 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\|U^k x_0\| = 0$, то решение $x = 0_n$ асимптотически устойчиво.

Доказательство очевидно.

Лемма 3. Если при достаточно малых x_0 верна оценка $\|x(\omega, x_0)\| \le \|x_0\|$, то решение $x = 0_n$ системы (1) устойчиво.

Доказательство. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon$. Исходя из непрерывности решений системы (1) от начальных значений, можем считать, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует, что $x(\omega, x_0)$ определено. Тогда по условию $\|x(\omega, x_0)\| \le \|x_0\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\|x(2\omega, x_0)\| = \|x(\omega, x(\omega, x_0))\| \le \|x(\omega, x_0)\| \le \|x_0\| < \varepsilon .$$

Продолжая подобным образом, на произвольном шаге получим

$$\|x(k\omega, x_0)\| \le \|x((k-1)\omega, x_0)\| \le \ldots \le \|x_0\| < \varepsilon .$$

Итак, по лемме 1 решение $x = 0_n$ устойчиво. Лемма доказана.

В силу гладкости системы (1) предположим, что она имеет вид

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{A}(\mathrm{t})x + g(t, x), \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $g(t, x)$ – достаточно гладкая функция от x в окрестности точки $x = 0_n$, $g(t, 0_n) \equiv 0_n$, то есть система (2) имеет нулевое решение, $g'_x(t, 0_n) \equiv 0_n$.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{A}(\mathrm{t})x$, $X(0) = E$. Обозначим как $X = X(\omega)$ матрицу монодромии.

Принимая во внимание свойства системы (2), можно подобрать такое число $\delta_0 > 0$, что любое решение $\mathrm{x}(\mathrm{t}, \mathrm{a})$ будет определяться и притом однозначно для всех $t \in [0, \omega]$, если $\|\mathrm{a}\| < \delta_0$ [1]. При этом свойства системы (2) позволяют предположить, что с помощью формулы Тейлора в окрестности точки $a = 0_n$ для оператора монодромии получено представление вида

$$\mathrm{x}(\omega, \mathrm{a}) = X(a + d(a) + p(a)), \tag{3}$$

в котором $d(a)$ – известная вектор-форма, для любого $\alpha \in R$ $d(\alpha a) = \alpha^k d(a)$, $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$, $k > 1$ (далее будем полагать, что k нечетно), а вектор-функция $p(a)$ определена лишь условием $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{-k} \| p(\alpha a) \| = 0$ (в смысле равномерной сходимости).

Обсудим возможность построения представления вида (3).

Решение системы (1) в окрестности точки 0_n можно представить в виде

$$x(t, a) = X(t)a + y(t, a), \tag{4}$$

где $y(t, a) = X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau, a)) d\tau$ – решение системы $\dot{y} = A(t)y +$ $+ \mathrm{g}(t, \mathrm{X}(t)a + y)$ с начальным значением $y(0, a) = 0_n$. При этом справедливо равенство $y'_a(t, 0_n) = 0_n$.

Покажем, что (4) является решением системы (2). Найдем производную от правой и левой части выражения (4):

$$\dot{\mathrm{x}}(\mathrm{t}, \mathrm{a}) = \left(X(t)a + X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau, a)) d\tau \right)'_{\mathrm{t}} =$$

$$= A(t)X(t)a + A(t)X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau, a)) d\tau + X(t)X^{-1}(t) g(t, x(t, a)) =$$

$$= A(t)\left(X(t)a + X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau, a)) d\tau \right) + g(t, x(t, a)) =$$

$$= A(t)x(t, a) + g(t, x(t, a)).$$

Получили тождество, то есть (4), действительно, является решением для системы (2).

Ввиду дифференцируемости решения по начальным значениям, матрица $x'_a(t, a)$ непрерывна в точке 0_n. Так как $x \equiv 0_n$ – решение системы (2), то $x(t, 0_n) \equiv 0_n$ в силу единственности решения с заданным начальным значением. Так как $g'_a(t, 0_n) \equiv 0_n$, то из равенства

$$y'_a(t, a) = X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau) g'_x(\tau, x(\tau, a)) x'_a(\tau, a) d\tau$$

следует, что $y_a'(t,0_n)\equiv 0_n$ или, что то же самое, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{-1}g_a'(t,\alpha a)\equiv 0_n$.

Подставим (4) само в себя и получим

$$\mathrm{U_a} = X(\omega)\left[a+\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau)g(\tau, X(\tau)a + y(t,a))d\tau\right]=$$

$$= X(\omega)\left[a+\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau)g(\tau, X(\tau)a)d\tau + \left(\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau)g_x'(\tau, X(\tau)a)y(\tau,a)d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau)0(y(\tau,a))d\tau\right)\right].$$

В структуре $\mathrm{U_a}$ выделим линейное слагаемое $X_a = X(\omega)a$, затем из известной функции $\int X^{-1}(\tau)g(\tau, X(\tau)a)dt$, исходя из ее гладкости, по формуле Тейлора – первое нелинейное однородное слагаемое $d(a)$ порядка k. Оставшиеся слагаемые $p(a)$ будут иметь порядок выше k.

В силу представления (3) по свойствам матрицы X выделим случаи, связанные с оценкой нормы оператора монодромии. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений в случае, когда спектральный радиус матрицы монодромии $\rho(X)\le 1$.

Пусть $\rho(X)<1$. Так как $\rho(X)$ – нижняя грань $\|X\|$ на множестве всех матричных норм [4], то для любого $\varepsilon\in(0;\, 1-\rho(X))$ существует такая $\|X\|$, что $\rho(X)\le\|X\|\le\rho(X)+\varepsilon$, то есть $\|\mathrm{X}\|<1$.

Теорема 1. Если существует нормировка, при которой $\|\mathrm{X}\|<1$, то решение $x=0_n$ системы (1) асимптотически устойчиво [3].

Пример 1. Пусть дана система вида (1):

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - 2x_2^4 + x_1^2x_2\cos 2\pi t - x_1x_2^2 + x_1^2\sin 2\pi t,\\ \dot{x}_2 = -x_2 + 3x_2^4 - x_1^2x_2\cos 2\pi t + x_1x_2^2 - x_2^2\sin 2\pi t\end{cases}\tag{5}$$

Проверим характер устойчивости ее нулевого решения.

Для данной системы $\mathrm{T}=1$, фундаментальная матрица линейной части имеет вид $X(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} & 2te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$.

Значит матрица монодромии – $X=\begin{pmatrix} e^{-1} & 2te^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$. Взяв, например, евклидову норму, получим $\|X\|_2=\sqrt{3e^{-2}+2\sqrt{2}e^{-2}}<1$. Следовательно, по теореме 1 нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Итак, при условии, что $\|\mathrm{X}\|\le 1$, вывод об устойчивости нулевого решения не зависит от свойств нелинейных членов правой части. В этом смысле подобные случаи принято называть «некритическими» и остается лишь вопрос об оценке области устойчивости. Очевидно, в качестве такой оценки по лемме 1 можно выбрать шар $\|a\|<\delta$, внутри которого $\|U_a\|\le(1-c)\|a\|$.

Далее рассмотрим «критические» случаи.

Допустим, $\mathrm{d}(\mathrm{a})=D(a)a$, где $D(a)$ – $n\times n$-матрица (очевидно, такое представление не единственное). При этом $D(\alpha a)=\alpha^k D(a)$.

Теорема 2. Если при некоторой нормировке и при каком-либо способе выбора подходящей матрицы $D(a)$ оказывается, что $\|X\|=1$ и $\|E+D(a)\|\le 1-c\|a\|^{k-1}$ для всех малых $\|a\|$, где $c>0$, то решение $x=0_n$ системы (1) устойчиво.

Доказательство. С помощью (3) получим оценку

$$\|\mathrm{x}(\omega,\mathrm{a})\|=\|X(a+d(a)+p(a))\|\le\|X\|\left(\|E+D(a)\|+\frac{\|p(a)\|}{\|a\|}\right)\|a\|. \qquad (6)$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha^{-k}\|p(\alpha a)\|=0$, где $k>1$, то существует $\delta>0$ такое, что $\frac{\|\mathrm{p}(\mathrm{a})\|}{\|a\|}\le\frac{c}{2}\|a\|^{k-1}$. Тогда из (6) следует, что

$$\|x(\omega,a)\|\le\|a\|\left(1-c\|a\|^{k-1}+\frac{c}{2}\|a\|^{k-1}\right)=\|a\|\left(1-\frac{c}{2}\|a\|^{k-1}\right)<\|a\|.$$

Следовательно, по лемме 3 решение $x=0_n$ устойчиво. Теорема доказана.

Аналогично может быть установлено утверждение.

Теорема 3. Если $\|\mathrm{X}(\mathrm{E}+\mathrm{D}(\mathrm{a}))\|\le 1-c\|a\|^{k-1}$ при некотором $c>0$ и всех малых $\|a\|$, то решение $x=0_n$ системы (1) устойчиво.

Пример 2. Пусть дана система вида (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-2x_1^3+x_1^2-5x_1x_2^2+3x_1x_2-x_2, \\ \dot{x}_2=x_1^3-3x_2^3-4x_2^2-3x_1x_2+x_1. \end{cases} \qquad (7)$$

Для линейной части системы (7) $\mathrm{X}(\mathrm{t})=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$. Для проведения вычислений удобно выбрать $T=2\pi$. Тогда $\|X\|_1=1$. Далее вычисляется $d(a)$.

Заметим, что наличие квадратичных членов в правой части системы (7) затрудняет использование второго метода Ляпунова. При данном подходе вопрос об устойчивости связан со свойствами вектор-функции $d(a)$, которая не содержит квадратичные слагаемые. Это свойство характерно для автономной системы, у которой матрица линейного приближения имеет только соизмеримые, чисто мнимые собственные значения.

Допустим,

$$d(a)=D(a)a=\begin{pmatrix}-5\pi a_1^2-5\pi a_2^2 & -\frac{3}{4}\pi a_1^2-\frac{3}{4}\pi a_2^2\\ \frac{3}{4}\pi a_1^2+\frac{3}{4}\pi a_2^2 & -5\pi a_1^2-5\pi a_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}.$$

Произведем оценку при достаточно малой $\|a\|_1$:

$$\|\mathrm{E}+\mathrm{D}(\mathrm{a})\|_1=$$

$$=\max\left(\left|1-5\pi a_1^2-5\pi a_2^2\right|+\left|\frac{3}{4}\pi a_1^2+\frac{3}{4}\pi a_2^2\right|;\left|-\frac{3}{4}\pi a_1^2-\frac{3}{4}\pi a_2^2\right|+\left|1-5\pi a_1^2-5\pi a_2^2\right|\right)=$$

$$=1-5\pi a_1^2-5\pi a_2^2+\frac{3}{4}\pi a_1^2+\frac{3}{4}\pi a_2^2=1-\left(5\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\left(a_1^2+a_2^2\right)=1-\frac{17}{4}\pi\left(a_1^2+a_2^2\right).$$

По свойству аналитической эквивалентности норм [4, с. 387] для любого вектора a имеет место $\|\mathrm{a}\|_2\geq\sqrt{2}\|a\|_1$, поэтому $a_1^2+a_2^2\geq 2\|a\|_1^2$. Таким образом, при $c=\frac{17}{2}\pi$ и всех малых $\|a\|_1$ имеем $\|\mathrm{E}+\mathrm{D}(\mathrm{a})\|_1\leq 1-c\|a\|_1^2$. Тогда по теореме 2 решение $x=0_n$ системы (7) устойчиво. Этот вывод иллюстрируется на рисунке 1 (построен в пакете Maple).

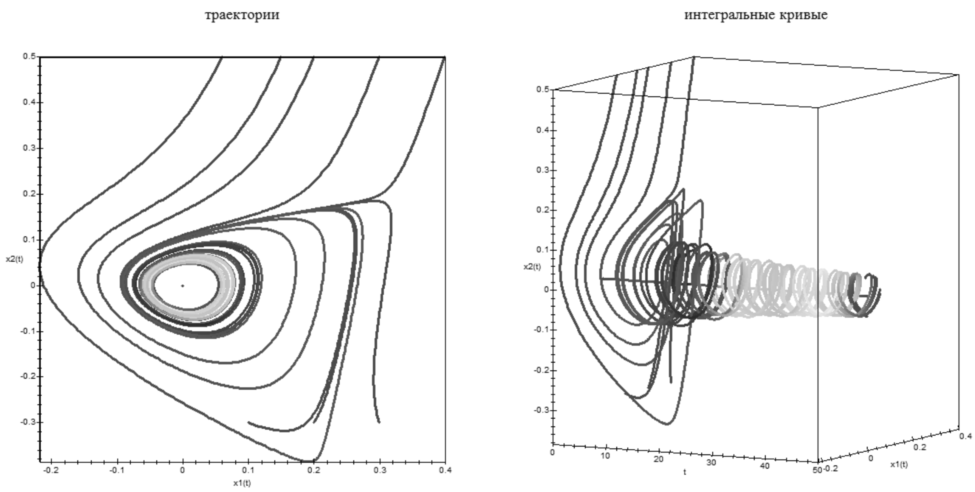

Рис. 1. Геометрическая интерпретация устойчивости нулевого решения системы (7)

Определим при $X = E$ коэффициентные условия устойчивости решения $x = 0_n$ для системы вида (1) и, положим, $n = 2$, $k = 3$,

$$d(a) = \begin{pmatrix} p_1 a_1^3 + p_2 a_1^2 a_2 + p_3 a_1 a_2^2 + p_4 a_2^3 & q_1 a_1^3 + q_2 a_1^2 a_2 + q_3 a_1 a_2^2 + q_4 a_2^3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

в формуле (3). В этом случае $d(a) = \mathrm{D}(\mathrm{a}) \cdot \mathrm{a}$, где

$$D(a) =$$
$$= \begin{pmatrix} p_1 a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2 & (1-\alpha_1) p_2 a_1^2 + (1-\alpha_2) p_3 a_1 a_2 + p_4 a_2^2 \\ q_1 a_1^2 + (1-\beta_1) q_2 a_1 a_2 + (1-\beta_2) q_3 a_2^2 & \beta_1 q_2 a_1^2 + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2 \end{pmatrix}$$

$p_2 = \alpha_1 p_2 + (1-\alpha_1) p_2$, $\quad p_3 = \alpha_2 p_3 + (1-\alpha_2) p_3$, $\quad q_2 = \beta_1 q_2 + (1-\beta_1) q_2$, $q_3 = \beta_2 q_3 + (1-\beta_2) q_3$, α_i, β_i – параметры, $i = 1, 2$.

Тогда

$$\mathrm{E} + \mathrm{D}(\mathrm{a}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + p_1 a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2 & (1-\alpha_1) p_2 a_1^2 + (1-\alpha_2) p_3 a_1 a_2 + p_4 a_2^2 \\ q_1 a_1^2 + (1-\beta_1) q_2 a_1 a_2 + (1-\beta_2) q_3 a_2^2 & 1 + \beta_1 q_2 a_1^2 + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

В условиях теоремы 2 фигурирует оценка $\|\mathrm{E}+\mathrm{D}(\mathrm{a})\| \le 1 - \mathrm{c}\|\mathrm{a}\|^{(\mathrm{k}-1)}$. Чтобы проверить ее справедливость, рассмотрим несколько вариантов матричной нормы.

Пусть $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

В этом случае

$$\|E + D(a)\|_\infty =$$
$$= max\left\{1 + p_1a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2 + \left|(1-\alpha_1)\, p_2 a_1^2 + (1-\alpha_2)\, p_3 a_1 a_2 + p_4 a_2^2\right|,\right.$$
$$\left.\left|q_1 a_1^2 + (1-\beta_1)\, q_2 a_1 a_2 + (1-\beta_2)\, q_3 a_2^2\right| + 1 + \beta_1 q_2 a_1^2 + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2\right\}.$$

Для выполнения условия $\|\mathrm{E}+\mathrm{D}(\mathrm{a})\|_\infty < 1$ необходимо, чтобы имели место на единичной окружности следующие оценки:

$$p_1 a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2 < 0, \tag{10}$$

$$\beta_1 q_2 a_1^2 + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2 < 0. \tag{11}$$

По критерию Сильвестра для оценки (10) необходимо и достаточно, чтобы $\begin{cases} \mathrm{p}_1 < 0, \\ \alpha_2 p_1 p_3 - \dfrac{1}{4}\alpha_1^2 p_2^2 > 0 \end{cases}$, а для оценки (11) $\begin{cases} \beta_1 q_2 < 0, \\ \beta_1 q_2 q_4 - \dfrac{1}{4}\beta_2^2 q_3^2 > 0 \end{cases}$.

Последние неравенства в этих системах всегда верны за счет выбора α_1, α_2 и β_1, β_2 соответственно.

Обозначим

$$\mathrm{f}_1(a) = 1 + p_1 a_1^2 + \alpha_1 p_2 a_1 a_2 + \alpha_2 p_3 a_2^2 + \left|(1-\alpha_1) p_2 a_1^2 + (1-\alpha_2) p_3 a_1 a_2 + p_4 a_2^2\right|.$$

Очевидно, что условие $\mathrm{f}_1(a) < 0$, требующееся для оценки $\|\mathrm{E}+\mathrm{D}(\mathrm{a})\|_\infty < 1$, достаточно проверить на единичной сфере, например, при исходно выбранной норме $\|\mathrm{a}\|_\infty = 1$. Так как $\|\mathrm{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, |a_2|\}$, $a_1^2 \le \|a\|_\infty^2$, $a_2^2 \le \|a\|_\infty^2$, $|a_1 a_2| \le \|a\|_\infty^2$, $|a_1| = 1$ или $|a_2| = 1$ при $\|\mathrm{a}\|_\infty = 1$, то можно усилить оценку:

$$\mathrm{f}_1(a) \le \left(p_1 + |(1-\alpha_1)p_2|\right)a_1^2 + \left(\alpha_1 p_2 a_1 a_2 - |(1-\alpha_2) p_3 a_1 a_2|\right) + \left(\alpha_2 p_3 + |p_4|\right)a_2^2 \le$$
$$\le \max\left\{p_1 + |(1-\alpha_1)p_2|, \quad \alpha_2 p_3 + |p_4|\right\} + |\alpha_1 p_2| + |(1-\alpha_2)p_3|.$$

Для улучшения оценки $\mathrm{f}_1(a) < 0$ учтем, что $|1-\alpha_2|$ целесообразно уменьшить, поэтому $\alpha_2 = 1$.

Итак, для выполнения условия $f_1(a) < 0$ потребуем, чтобы были справедливы неравенства

$$\begin{cases} p_1 < 0, \\ p_1 p_3 > 0, \\ \max\{p_1 + |(1-\alpha_1)p_2|, \quad p_3 + |p_4|\} + |\alpha_1 p_2| < 0. \end{cases} \tag{12}$$

В то же время по критерию Сильвестра для оценки $f_1(a) < 0$ требуется выполнение условий

$$\begin{cases} p_1 + |(1-\alpha_1)p_2| < 0, \\ (p_1 + |(1-\alpha_1)p_2|)\cdot(\alpha_2 p_3 + |p_4|) - \frac{1}{4}(|\alpha_1 p_2| + |(1-\alpha_2)p_3|)^2 > 0. \end{cases}$$

Здесь также целесообразно взять $\alpha_2 = 1$. Тогда условия примут вид:

$$\begin{cases} p_1 + |(1-\alpha_1)p_2| < 0, \\ (p_1 + |(1-\alpha_1)p_2|)\cdot(p_3 + |p_4|) - \frac{1}{4}(\alpha_1 p_2)^2 > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, $f_1(a) < 0$ при выполнении одного из условий (12) или (13), где α_1 – некоторое число.

Аналогично для выполнения оценки

$$\begin{aligned} f_2(a) &= \beta_1 q_2 a_1^2 + \beta_2 q_3 a_1 a_2 + q_4 a_2^2 + \left|q_1 a_1^2 + (1-\beta_1) q_2 a_1 a_2 + (1-\beta_2) q_3 a_2^2\right| = \\ &= (\beta_1 q_2 + |q_1|) a_1^2 + (\beta_2 q_3 a_1 a_2 + |(1-\beta_1) q_2 a_1 a_2|) + (q_4 + |(1-\beta_2) q_3|) a_2^2 \le \\ &\le \max\{\beta_1 q_2 + |q_1|, \quad q_4 + |(1-\beta_2) q_3|\} + |\beta_2 q_3| + |(1-\beta_1) q_2| < 0 \end{aligned}$$

можно потребовать выполнение одного из условий (при $\beta_1 = 1$):

$$\begin{cases} q_2 < 0, \\ q_2 q_4 > 0, \\ \max\{q_2 + |q_1|, \quad q_4 + |(1-\beta_2) q_3|\} + |\beta_2 q_3| < 0 \end{cases} \tag{14}$$

или

$$\begin{cases} q_2 + |q_1| < 0, \\ (q_2 + |q_1|)\cdot(q_4 + |(1-\beta_2) q_3|) - \frac{1}{4}(\beta_2 q_3)^2 > 0, \end{cases} \tag{15}$$

где β_2 – некоторое число.

Таким образом, в силу проведенных рассуждений и по теореме (3) справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Если для системы (2) выполняются условия:

1) $n = 2$, $k = 3$;

2) имеет место равенство (8);

3) существует α_1, удовлетворяющее одной из оценок (12) или (13);

4) существует β_2, удовлетворяющее одной из оценок (14) или (15),

то решение $x = 0_n$ системы (2) устойчиво.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибиков, Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.
2. Зубов, В. И. Теория колебаний [Текст]. – М. : Высшая школа, 1979. – 400 с.
3. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений [Текст]. – М. : Наука, 1966. – 332 с.
4. Хорн, Р.А. Матричный анализ [Текст] / Р.А. Хорн, Ч.Р. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

REFERENCES

1. Bibikov, Yu.N. *Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Text] [Course of ordinary differential equations]. – Moscow : High School, 1991. – 303 p.
2. Zubov, V.I. *Teoriya kolebaniy* [Text] [Theory of vibrations] / V.I. Zubov. – Moscow : High School, 1979. – 400 p.
3. Krasnosel'skiy, M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravneniy* [Text] [Translation operator of the differential equations]. – Moscow : Science, 1966 – 332 p.
4. Horn, R.A. *Matrichnyy analiz* [Text] [Matrix analysis] / R.A. Horn, C.R. Johnson. – Moscow : Mir (Peace), 1989. – 655 p.

N.M. Kudryashova

CONDITIONS FOR STABILITY OF THE ZERO SOLUTION OF THE PERIODIC SYSTEM

For systems of differential equations with periodic right part investigated the question of the stability of the zero solution with estimates of the norm of the operator of monodromy.

the system of differential equations, stability, operator of monodromy, norm of matrix.