УДК 51(07): 372.851

А.М. Лавров

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ИЗ ЗАОЧНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ – 2010»

Приводятся два способа решения геометрической задачи (задача № 5) из заочного тура олимпиады «Покори Воробьевы горы»: одно – традиционное алгебраическое, близкое к школьному, другое – геометрическое, более короткое и более изящное.

геометрия, прямоугольный треугольник, высота, олимпиада «Покори Воробьевы горы»

Олимпиада «Покори Воробьевы горы» проводится ежегодно Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова совместно с издательским домом «Московский комсомолец» в соответствии с положениями приказа Министерства образования и науки Российской Федерации «Об утверждении Порядка проведения олимпиад школьников» № 285 от 22 октября 2007 года (в редакции приказов Министерства образования и науки РФ от 4 сентября 2008 года № 255, от 20 марта 2009 года № 92, от 6 октября 2009 года № 371, от 11 октября 2010 года № 1006).

Основными целями олимпиады являются:

– выявление и развитие у учащихся образовательных учреждений, осваивающих общеобразовательные программы среднего (полного) общего образования, творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности;

– создание необходимых условий для поддержки одаренных детей;

– распространение и популяризация научных знаний среди молодежи;

– оказание помощи учащимся старших классов в профессиональной ориентации.

Олимпиада проводится с 1 сентября по 31 марта и включает два обязательных этапа:

1) отборочный (проводится в заочной форме с применением дистанционных образовательных технологий в период с 1 октября по 31 января);

2) заключительный (проводится в очной форме с 1 февраля по 31 марта).

В олимпиаде на добровольной основе принимают участие лица, обучающиеся в образовательных учреждениях и осваивающие общеобразовательные программы среднего (полного) общего образования.

К участию в заключительном этапе допускаются победители и призеры отборочного этапа.

Олимпиада включает задания, составленные на основе примерных общеобразовательных программ основного общего и среднего (полного) общего образования по следующим предметам: 1) биология, 2) иностранные языки,

3) история, 4) литература, 5) математика, 6) обществознание, 7) физика, 8) химия.

Согласно действующему законодательству, победителям и призерам могут быть предоставлены льготы при поступлении в высшие учебные заведения на специальности (направления подготовки) в соответствии с профилем олимпиады.

Список общеобразовательных предметов, соответствующих профилю олимпиады по предмету, и специальностей (направлений подготовки), по которым могут быть предоставлены льготы победителям и призерам, определяется Перечнем олимпиад школьников на текущий учебный год.

Официальный портал олимпиады размещен в сети Интернет по адресу www.mk.ru /msu/

В заочном туре олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2010» по математике среди прочих была предложена следующая задача.

Задача 5. Из вершины *C* прямого угла треугольника *ABC* опущена высота *CH*. Где на отрезке *BH* нужно поставить точку *M*, чтобы из отрезков *AH*, *AM* и *CM* можно было составить прямоугольный треугольник?

Решение.

Первый способ – алгебраическое решение.

Прямоугольный треугольник можно однозначно определить отрезками, на которые точка H – основание высоты CH – делит гипотенузу AB. Поэтому зададим ΔABC отрезками $AH = a$ и $BH = b$ $(a > 0,\ b > 0)$, тогда $CH = \sqrt{ab}$ (см. рис. 1).

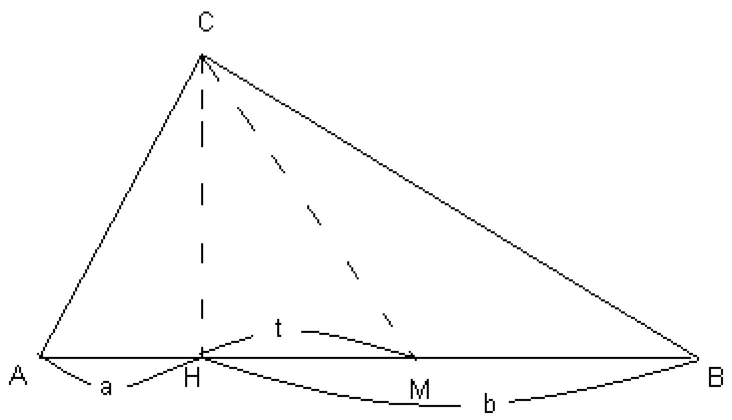

Рис. 1

Пусть $HM = t$ $(0 \le t \le b)$, тогда по теореме Пифагора

$$CM = \sqrt{CH^2 + HM^2} = \sqrt{ab + t^2}.$$

Тем самым мы определили стороны искомого прямоугольного треугольника: $AH = a,\ AH = a + t,\ CM = \sqrt{ab + t^2}$, а так как $AH \le AM$, то отрезок AH гипотенузой быть не может. Остаются два случая:

1. Если гипотенуза – AM , то

$$AM^2 = AH^2 + CM^2,$$

то есть

$$\left(a + t\right)^2 = a^2 + \left(\sqrt{ab + t^2}\right)^2 \Rightarrow a^2 + 2at + t^2 = a^2 + ab + t^2 \Rightarrow t = \frac{b}{2},$$

причем $t \in \left[0, b\right]$ независимо от величины a .

Тем самым точку M нужно поместить на середину отрезка BH. Обозначим ее M_1.

2. Если гипотенуза – CM , то

$$CM^2 = AH^2 + AM^2,$$

то есть

$$\left(\sqrt{ab + t^2}\right)^2 = a^2 + \left(a + t\right)^2 \Rightarrow ab + t^2 = a^2 + a^2 + 2at + t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2at = ab - 2a^2 \Rightarrow t = \frac{b}{2} - a\cdot$$

При этом условие $t \le b$ выполнено автоматически, а условие $t \ge 0$ – только при $b \ge 2a$.

Тем самым при $b \ge 2a$ точку M (обозначим ее M_2) нужно поместить на отрезке BH на расстоянии $\frac{b}{2} - a$ от точки H, а так как $\frac{b}{2} - a < \frac{b}{2}$, то точки M_1 и M_2 никогда не могут совпасть (см. рис. 2).

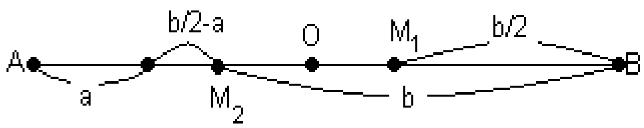

Рис. 2

При этом расстояние от точки M_1 до точки B, правого конца отрезка AB, равно $\frac{b}{2}$. Расстояние от точки M_2 до точки A, левого конца отрезка AB, равно $a + \left(\frac{b}{2} - a\right) = \frac{b}{2}$. Тем самым при $b \ge 2a$ точки M_1 и M_2 расположены на отрезке AB симметрично относительно его центра – точки O .

Замечание. Запишем условие $b \ge 2a$ в терминах углов ΔABC.

Имеем: $a = AH = CH \cdot ctgA$, $b = BH = CH \cdot ctg\,B = CH \cdot tg\,A$ и условие $b \ge 2a$ переходит в $CH \cdot tgA \ge 2 \cdot CH \cdot ctg\,A \Leftrightarrow tg^2 A \ge 2$, откуда с учетом того, что угол A – острый, получаем $arctg\sqrt{2} \le A < \frac{\pi}{2}$.

Тем самым ответ в задаче таков: при $b < 2a \Leftrightarrow 0 < A \le arctg\sqrt{2}$ для точки M есть единственная возможность – это середина отрезка BH, а при $b \ge 2a \Leftrightarrow arctg\sqrt{2} \le A < \frac{\pi}{2}$ появляется еще одна возможность – это точка, симметричная точке M относительно середины отрезка AB.

Второй способ – геометрическое решение

Так как отрезок AH гипотенузой быть не может, то возможны только два случая:

$$CM^2 = AH^2 + AM^2 \Leftrightarrow CM^2 - AM^2 = AH^2 \tag{1}$$

или

$$AM^2 = AH^2 + CH^2 \Leftrightarrow AM^2 - CM^2 = AH^2. \tag{2}$$

Условия (1) и (2) можно объединить в одно:

$$\left|AM^2 - CM^2\right| = AH^2. \tag{3}$$

Далее, из прямоугольного треугольника CKM

$$MK^2 = CM^2 - CK^2,$$

а из прямоугольного треугольника AKM

$$MK^2 = AM^2 - AK^2.$$

Следовательно,

$$CM^2 - CK^2 = AM^2 - AK^2 \Rightarrow AM^2 - CM^2 = AK^2 - CK^2,$$

и условие (3) записывается так:

$$\left|AK^2 - CK^2\right| = AH^2 \Leftrightarrow \left|AK - CK\right| \cdot \left(AH + CK\right) = AH^2$$

или

$$\left|AK - CK\right| \cdot AC = AH^2, \tag{4}$$

поскольку $AK + CK = AC$.

При этом $AH \ne 0 \Leftrightarrow AK \ne CK$.

Из (4) получаем

$$\frac{\left|AK - CK\right|}{AH} = \frac{AH}{AC}.$$

Из подобия треугольников ACH и ACN вытекает пропорциональность соответствующих сторон:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AN}{AH}.$$

Следовательно, $|AK - CK| = AN$.

1) Если $AK > CK$ (см. рис. 3), то

$$AN = AK - CK,$$

откуда

$$CK = AK - AN = KN,$$

то есть точка K расположена на середине отрезка CN, а точка M_1 – на середине отрезка BH.

Это рассуждение проходит независимо от расположения точки H на гипотенузе AB.

2) Если $AK < CK$ (см. рис. 4), то $AN = CK - AK$. Добавляя к обеим частям этого равенства по KN, получаем $AN + KN = (CK + KN) - AK$ или $AK = CN - AK$, откуда $AK = \dfrac{CN}{2}$.

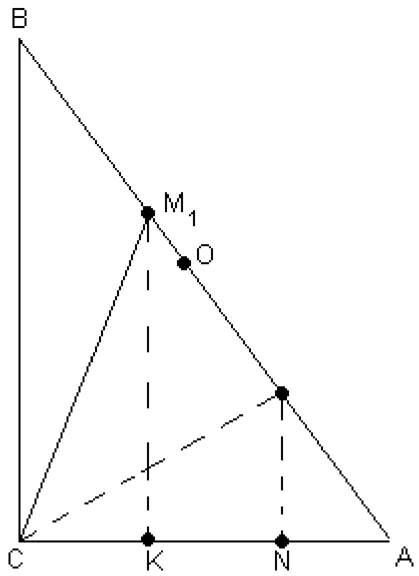

Рис. 3

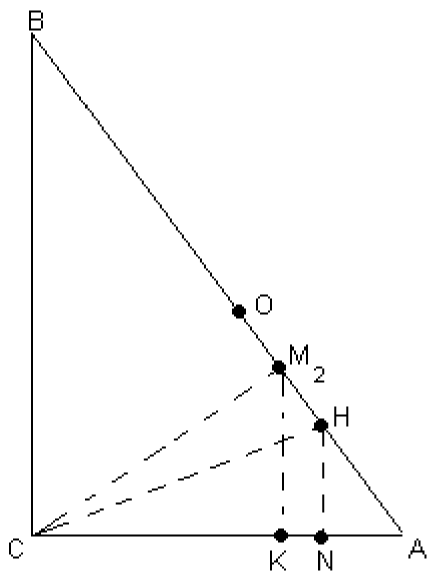

Рис. 4

Но точка M_2 попадает на отрезок BH тогда и только тогда, когда точка K попадает на отрезок CN, то есть когда

$$AK \ge AN \Leftrightarrow \frac{CN}{2} \ge AN \Leftrightarrow \frac{BH}{2} \ge AH \Leftrightarrow BH \ge 2AH \cdot$$

Замечание. По доказанному выше во втором случае $AK = \frac{CN}{2}$, а в первом $CK = \frac{CN}{2}$. Следовательно, точки M_1 и M_2 расположены на гипотенузе AB симметрично относительно ее центра.

Ответ, естественно, такой же, как и при первом способе решения.

Полное задание заочного тура олимпиады «Покори Воробьевы горы – 2010» размещено в сети Интернет по адресу http://www.mk.ru/msu/archive/2010/zadanp11/

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, В. Олимпиада «Ломоносов – 2010» [Текст] / В. Алексеев [и др.] // Математика. – 2010. – № 24. – С. 34–40.
2. Алексеев, В. Олимпиада «Покори Воробьевы горы» [Текст] / В. Алексеев [и др.] // Математика. – 2010. – № 23. – С. 30–37.
3. Бегунц, А.В. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005–2008) [Текст] / А.В. Бегунц, П.А. Бородин, И.Н. Сергеев ; под общ. ред. И.Н. Сергеева. – М. : Изд-во ЦПИ при мех.-мат. фак. МГУ, 2008. – 48 с.
4. Вавилов, В.В. Об одной олимпиадной задаче [Текст] // Потенциал. – 2012. – № 3. – С. 57–61.
5. Егоров, А.А. Задачи вступительных экзаменов [Текст] / сост. А.А. Егоров, В.А. Тихомирова. – М. : Бюро Квантум, 2008. – 176 с. – (Прил. к журналу «Квант». 2008. № 6).
6. Егоров, А.А. Экзаменационные материалы по математике и физике [Текст] / сост. А.А. Егоров, С.А. Дориченко, В.А. Тихомирова. – М. : Бюро Квантум, 2009. – 208 с. (Приложение к журналу «Квант». 2009. № 6).

A.M. Lavrov

THE SOLUTION OF A GEOMETRY PROBLEM FROM THE CORRESPONDENCE ROUND OF THE CONTEST «CONQUER THE VOROBYOVY GORY – 2010»

The article suggests two different solutions of a geometry problem (problem no. 5) for the correspondence round of the contest «Conquer the Vorobyovy Gory». One of the solutions is algebraic, the other, a shorter and a more elegant one, is geometric.

geometry, right triangle, altitude, contest «Conquer the Vorobyovy Gory»