УДК 517.5

А.Н. Конёнков

ОПЕРАТОР СОПРЯЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается оператор сопряжения для пространств периодических функций нескольких переменных. Вводится шкала пространств, зависящая от четырех параметров, которая является обобщением шкалы пространств Бесова периодических функций, а при нулевом значении четвертого параметра совпадающая с ней. Устанавливается, что оператор сопряжения действует в этой шкале «со сдвигом» по четвертому параметру, уменьшая, вообще говоря, гладкость функции при размерности пространства больше единицы. Показано, что для многомерных пространств Гельдера модуль непрерывности сопряженной функции может отличаться от модуля непрерывности Гельдера на степень логарифма, зависящей от размерности пространства.

преобразование Гильберта, сопряженная функция, пространства Бесова, пространства Гельдера, пространства Зигмунда.

В настоящей работе рассматривается оператор сопряжения в многомерном периодическом случае в пространствах, которые являются обобщением пространств Бесова $B^s_{pq}(\mathbb{T}^n)$ [4, гл. 9], где $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор.

Для функции одной переменной оператор сопряжения (преобразование Гильберта) может быть определен в виде

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} ctg\left(\frac{x-y}{2}\right) f(y)dy$$

…тельную и мнимую части граничных значений функции, являющейся аналитической в единичном круге. В пространствах Гельдера $C^\alpha(\mathbb{T})$, $0<\alpha<1$, которые являются частным случаем пространств Бесова, ограниченность преобразования Гильберта была доказана И.И. Приваловым [8]. Для пространств Гельдера – Зигмунда $C^s(\mathbb{T}) = B^s_{\infty\infty}(\mathbb{T})$, $s>0$, такое утверждение было получено Н.К. Бари и С.Б. Стечкиным [2]. Для всей шкалы пространств Бесова $B^s_{pq}(\mathbb{T}^n)$ равномерная ограниченность норм преобразования Гильберта при $p > p_0 > 0$, $0 < q \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ установлена в работе [4].

Для случая двух переменных оператор сопряжения уже не отображает пространства Гельдера в себя. Л. Чезари [7] получил для функций из $C^\alpha(\mathbb{T}^2)$,

$0 < \alpha < 1$, оценку для модуля непрерывности сопряженной функции, которая отличается от модуля непрерывности функций из пространств Гельдера на логарифмический множитель. Как отметил И.Е. Жак [3], эта оценка является точной. Таким образом, модуль непрерывности сопряженной функции из многомерных пространств Гельдера может «ухудшаться» на логарифм.

Мы вводим пространства $B_{pq}^{st}(\mathsf{T}^n)$, в которых дополнительный (по сравнению с пространствами Бесова) параметр t дает большую «разрешающую способность» для учета более слабых изменений гладкости функции. В частности, доказывается, что модуль непрерывности функций $B_{\infty\infty}^{\alpha t}(\mathsf{T}^n)$ отличается от модуля непрерывности Гельдера логарифмическим множителем в степени $-t$.

Целью работы является изучение оператора сопряжения в шкале $B_{pq}^{st}(\mathsf{T}^n)$. Устанавливается, что он является ограниченным оператором из $B_{pq}^{st}(\mathsf{T}^n)$ в $B_{pq}^{s,t-n+1}(\mathsf{T}^n)$. В одномерном случае этот результат совпадает с полученным ранее в работе [4], а в двумерном при $p = q = \infty$, $0 < \alpha < 1$, $t = 0$ совпадает с оценкой Л. Чезаре. Таким образом, полученная в настоящей работе оценка для многомерных пространств Гельдера является точной.

1. Необходимые определения и обозначения.

Обозначим $x = (x_1, \dots, x_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_i \in \mathsf{Z}$, – мультииндекс, $kx = k_1x_1 + \dots k_nx_n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, $k^* = k_1 \dots k_n$, $\mathsf{T}^n = \mathsf{R}^n/(2\pi\mathsf{Z})^n$ – n-мерный тор. Обозначим через $\bar{e}_1 = (1,0,\dots,0)$,..., $\bar{e}_n = (0,0,\dots,1)$ орты координатных осей, $\Delta_i(h)f(x) = f(x + h\bar{e}_i) - f(x)$ – разность по i-й координате с шагом h.

Всюду далее рассматриваем пространства вещественнозначных функций. Если не оговорено противное, нормы относятся к пространствам на торе T^n.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} c_k e^{ikx}$$

принадлежит пространству $D'(\mathsf{T}^n)$ 2π-периодических обобщенных функций. Сопряженная к f функция определяется равенством

$$\tilde{f}(x) = L[f] = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} (-i)^{|k|} \operatorname{sign} k^* c_k e^{ikx}.$$

Пусть четные функции $\varphi_0, \varphi_1 \in C_0^\infty(\mathsf{R}^n)$ таковы, что $\operatorname{supp}\varphi_0 = \{|x| \le 2\}$, $\operatorname{supp}\varphi_1 = \{2^{-1} \le |x| \le 2\}$, и для $\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x)$, $j \in \mathsf{N}$, справедливо равенство $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \equiv 1$, $x \in \mathsf{R}$. Обозначим

$$Q_j(x) = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} \varphi_j(|k|) c_k e^{ikx}.$$

В силу последнего тождества получаем разбиение f в сумму тригонометрических многочленов:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(x).$$

Для $p, q > 0$, $s, t \in \mathsf{R}$ введем пространства

$$B_{pq}^{st}(\mathsf{T}^n) = \left\{ f \in D'(\mathsf{T}^n) \,|\, \| f \|_{B_{pq}^{st}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} (1+j)^{tq} \| Q_j \|_{L_p}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

с обычной модификацией при $q = \infty$. При $t = 0$ эти пространства совпадают с пространствами Бесова $B_{pq}^{s}(\mathsf{T}^n)$ периодических функций [5, гл. 9].

Теорема 1. Пусть $0 \le q \le \infty$, $s, t \in R$. Пространства $B_{pq}^{st}(\mathsf{T}^n)$ являются банаховыми пространствами при $1 \le p \le \infty$ и квазибанаховыми при $0 < p < 1$.

Доказательство повторяет соответствующее доказательство для пространств Бесова [5, гл. 9], [6, § 2.3].

2. Оператор сопряжения в многомерном случае.

В этом разделе мы устанавливаем основной результат об операторе сопряжения во введенной шкале пространств.

Теорема 2. Пусть $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $s, t \in \mathsf{R}$. Тогда оператор сопряжения является ограниченным оператором из $B_{pq}^{st}(\mathsf{T}^n)$ в $B_{pq}^{s,t-n+1}(\mathsf{T}^n)$, причем его норма равномерно ограничена при указанных значениях параметров:

$$\| \widetilde{f} \|_{B_{pq}^{s,t-n+1}} \le C(n) \| f \|_{B_{pq}^{st}} . \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим

$$T_u^v(y) = \sum_{j=u}^{v} a_j \cos jy + b_j \sin jy. \tag{2}$$

Ключевым неравенством в доказательстве требуемой оценки сопряженных тригонометрических полиномов к Q_j, фигурирующих в определении нормы пространств $B^{st}_{pq}(\mathsf{T}^n)$, является следующее неравенство для тригонометрических многочленов одной пространственной переменной вида (2)

$$\| \widetilde{T}^{mj}_j \|_{L_p} \le C(m) \| T^{mj}_j \|_{L_p}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{3}$$

установленное в работе [4]. В качестве j будут фигурировать степени двойки. Отметим, что в настоящей работе дана оценка сверху для $C(m)$ и, как следствие, в данной теореме верхняя граница для значения постоянной $C(n)$ из (1) может быть указана явно.

Идея доказательства состоит в разбиении $\widetilde{Q}_j$, $j \ge 1$, на тригонометрические полиномы, каждый из которых по любой переменной имеет вид T^{4j}_j и может быть оценен в $L_p(\mathsf{T}^n)$ с помощью неравенства (3). Затем проводится оценка сверху минимального количества полиномов такого вида, которое нужно для требуемого представления $\widetilde{Q}_j$.

Полагая $w(x) = \sum\limits_{|k| \le 1} (-1)^k \operatorname{sign} k^* e^{ikx}$ и используя неравенство Юнга, имеем

$$\| \widetilde{Q}_0 \|_{L_p} = \| Q_0 * w \|_{L_p} \le \| Q_0 \|_{L_p} \| w \|_{L_1} = C(n) \| Q_0 \|_{L_p} . \tag{4}$$

Для мультииндекса $l = (l_1, \ldots, l_n)$ обозначим

$$\Psi_l(x) = \prod_{j=1}^n \varphi_{l_j}(x_j).$$

Поскольку $\sum_{l \in \mathsf{Z}^n} \Psi_l(x) \equiv 1$, то

$$\widetilde{Q}_j(x) = \sum_{l \in \mathsf{Z}^n} F[\Psi_l] * \widetilde{Q}_j(x) = \sum_{k \in \mathsf{Z}^n} \varphi_j(|k|) \varphi_1(k_1 / 2^{l_1}) \ldots \varphi_1(k_n / 2^{l_n}) c_k e^{ikx}, \tag{5}$$

где F – преобразование Фурье в R^n. Заметим, что в этой сумме только конечное число слагаемых отлично от тождественного нуля и

$$\| \widetilde{Q}_j \|_{L_p} \le \sum_{l \in \mathsf{Z}^n} \| F[\Psi_l] * \widetilde{Q}_j \|_{L_p}, \tag{6}$$

где в правой части стоит конечная сумма. Оценим ее слагаемые, применяя неравенство (3) с $m = 4$ последовательно по каждой переменной:

$$\| F[\Psi_l] * \widetilde{Q}_j \|_{L_p} = \| L[F[\Psi_l] * Q_j] \|_{L_p} \le C^n(4) \| F[\Psi_l] * Q_j \|_{L_p} .$$

Используя представление [1, § 71 a)]

$$F[\Psi_l]*Q_j(x)=2^{l^*}\int_{\mathbb{R}^n}Q_j(x-y)\Psi_{(1,\ldots,1)}(2^{l_1}y_1,\ldots,2^{l_n}y_n)dy$$

(здесь в правой части может появиться константа, зависящая от того, как именно определяется преобразование Фурье, что для наших целей несущественно), имеем

$$\|\Psi_l*\widetilde{Q}_j\|_{L_p}\le\|Q\|_{L_p}\,2^{l^*}\,\|\Psi_{(1,\ldots,1)}(2^{l_1}\cdot,\ldots,2^{l_n}\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}=$$

$$=\|Q\|_{L_p}\|\Psi_{(1,\ldots,1)}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}=C(n)\|Q\|_{L_p}\,.$$

Таким образом, норма каждого слагаемого в правой части (6) оценена через норму соответствующего многочлена Q_j.

Подсчитаем теперь максимальное количество ненулевых слагаемых в этой сумме. Коэффициенты Фурье Q_j, а значит и $\widetilde{Q}_j$ могут быть отличны от нуля только в шаровом слое $2^{j-1}\le|k|\le 2^{j+1}$, поскольку они получаются из коэффициентов f умножением на $\varphi_j(|k|)$. Этот слой покрывается $2n$ параллелепипедами $2^{j-1}\le\pm k_m\le 2^{j+1}$, $|k_i|\le 2^{j+1}$, $i\ne m$, $m=1,\ldots,n$. В каждом из этих параллелепипедов у функции $\Psi_l(x)=\psi_{l_1}(x_1)\ldots\psi_{l_n}(x_n)$ для индекса m $\psi_{l_m}\not\equiv 0$ для трех значений индекса $l_m=j-1$, $l_m=j$, $l_m=j+1$, а остальные функции $\psi_{l_i}\not\equiv 0$ для $j+2$ значений $l_i=0,1,\ldots,j+1$. Всего же число функций $\Psi_l\not\equiv 0$ в слое $2^{j-1}\le|k|\le 2^{j+1}$ не превосходит $2n\times 3\times(j+2)^{n-1}\le C(n)(j+1)^{n-1}$. Отсюда с учетом (6), а также (4) для $j=0$

$$\|\widetilde{Q}_j\|_{L_p}\le C(n)(j+1)^{n-1}\|Q_j\|_{L_p}\,.$$

Подставляя полученную оценку в норму пространства $B_{pq}^{s,t-n+1}(\mathbb{T}^n)$, получаем

$$\|\widetilde{f}\|_{B_{pq}^{s,t-n+1}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}(1+j)^{(t-n+1)q}\|\widetilde{Q}_j\|_{L_p}^q\right)^{1/q}\le$$

$$\le\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsq}(1+j)^{tq}C^q(n)\|\widetilde{Q}_j\|_{L_p}^q\right)^{1/q}C(n)\|f\|_{B_{pq}^{s,t}}\,.$$

Теорема доказана.

3. Оценка модуля непрерывности функций из пространств $B^{\alpha t}_{\infty\infty}(\mathrm{T}^n)$

В одномерном случае при $t = 0$ теорема 2 утверждает ограниченность оператора сопряжения в пространствах Бесова,

$$\| \widetilde{f} \|_{B^s_{pq}(\mathrm{T})} \le C(n) \| f \|_{B^s_{pq}(\mathrm{T})},$$

что совпадает с результатом работы [4].

Для двумерного случая Чезари [7] для функции f из пространств Гельдера $C^\alpha(\mathrm{T}^2) = B^\alpha_{\infty\infty}(\mathrm{T}^2)$, $0 < \alpha < 1$, была получена оценка для модуля непрерывности сопряженной функции, содержащая логарифмы:

$$| \widetilde{f}(x+\Delta x, y+\Delta y) - \widetilde{f}(x,y) | \le C(| \Delta x |^\alpha\ O(| \log | \Delta x ||) + | \Delta y |^\alpha\ O(| \log | \Delta y ||).$$

И.Е. Жак доказал [3], что эта оценка является точной. Таким образом, в двумерном случае модуль непрерывности функции, сопряженной к функции из пространства Гельдера, может «ухудшаться» на логарифм. Покажем, что во введенной шкале пространств с большей «разрешающей способностью» для случая пространств типа Гельдера – Зигмунда ($p = q = \infty$) модуль непрерывности имеет логарифмический множитель.

Теорема 3. Если $0 < \alpha < 1$, $t \in \mathrm{R}$, и $f \in B^{\alpha t}_{\infty\infty}(\mathrm{T}^n)$, то

$$| \Delta_i(h) f(x) | \le C | h |^\alpha\ (| \ln | h | + 1)^{-t}\ \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}}. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $0 < h < 1/2$. Выберем m такое, что $2^{-m-1} \le h < 2^{-m}$. Имеем:

$$| \Delta_i(h) f(x) | \le \sum_{j=0}^{\infty} | \Delta_i(h) Q_j(x) |.$$

Разобьем сумму на две части $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \sum_{j=0}^{m} | \Delta_i(h) Q_j(x) | \le \sum_{j=0}^{m} h \| \frac{\partial}{\partial x_i} Q_j \|_{L_\infty}.$$

Используя неравенство Бернштейна, получаем:

$$I_1 \le h \sum_{j=0}^{m} 2^{j+1} \| Q_j \|_{L_\infty} \le h \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} \sum_{j=0}^{m} 2^{j+1} 2^{-\alpha j} (j+1)^{-t}.$$

При $t < 0$

$$I_1 \le 2^{-m+1} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}}\ (m+1)^{-t} \sum_{j=0}^{m} 2^{j(1-\alpha)} \le$$

$$\le C2^{-m} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} (m+1)^{-t} 2^{(m-\alpha)} \le Ch^{\alpha} |\ln h|^{-t} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} .$$

При $t > 0$

$$\sum_{j=0}^{[m/2]} 2^{j(1-\alpha)} (j+1)^{-t} \le C 2^{m(1-\alpha)} (m+1)^{-t},$$

$$\sum_{j=[m/2]+1}^{m} 2^{j(1-\alpha)} (j+1)^{-t} \le 2(m+1)^{-t} \sum_{j=[m/2]+1}^{m} 2^{j(1-\alpha)} \le C 2^{m(1-\alpha)} (m+1)^{-t},$$

откуда

$$I_1 \le 2^{-m} 2^{m(1-\alpha)} (m+1)^{-t} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} \le Ch^{\alpha} |\ln h|^{-t} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} . \qquad (8)$$

Аналогично для I_2 при $t > 0$

$$I_2 = \sum_{j=m+1}^{\infty} |\Delta_i(h) Q_j(x)| \le 2 \sum_{j=m+1}^{\infty} \| Q_j \|_{L_\infty} \le$$

$$\le 2 \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha j} (j+1)^{-t} \le 2(m+1)^{-t} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha j} \le \qquad (9)$$

$$\le Ch^{\alpha} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} (m+1)^{-t} 2^{-\alpha m} \le Ch^{\alpha} |\ln h|^{-t} \| f \|_{B^{\alpha t}_{\infty\infty}} .$$

При $t < 0$, разбивая сумму на две, от $m+1$ до $2m$ и от $2m+1$ до ∞, получаем ту же оценку. Объединяя (8) и (9), получаем (7). Теорема доказана.

Для $n = 2$ и $t = 0$ из теорем 2 и 3 вытекает оценка Л. Чезаре. В силу замечания И.Е. Жака полученный результат является точным для пространств Гельдера двух переменных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер, Н.И. Лекции по теории аппроксимации [Текст]. – М. : Наука, 1965.
2. Бари, Н.К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций [Текст] / Н.К. Бари, С.Б. Стечкин // Труды Моск. математ. о-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
3. Жак, И.Е. По поводу одной теоремы Л. Чезари о сопряженных функциях двух переменных [Текст] // ДАН. – 1952. – Т. 87, № 6. – С. 887–880.
4. Коненков, А.Н. Ограниченность оператора сопряжения в пространствах Бесова [Текст] / А.Н. Коненков, А.И. Сюсюкалов // Докл. РАН. – 2004. – Т. 397, № 4. – С. 449–452.
5. Трибель Х. Теория функциональных пространств. [Текст] – М. : Мир, 1986.
6. Трибель, Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы [Текст]. – М. : Мир, 1980.

7. Chesari, L. Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di piu variabili [Text] // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. – 1938. – № 2. – P. 279–295.
8. Privaloff, I. Sur les fonctions conjuguees [Text] // Bull. Soc. Math. Fr. – 1916. – Vol. 44. – P. 100–103.

REFERENCES

1. Akhiyezer, N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* [Lectures on the Theory of Approximation] [Text]. – Moscow : Science, 1965.
2. Bari, N.K. *Nailuchshiye priblizheniya i differentsial'nyye svoystva dvukh sopryazhennykh funktsiy* [Best approximations and differential properties of two conjugate functions] [Text] / N.K. Bari, Stechkin S.B. // 1956. – Vol. 5. – P. 483–522.
3. Zhak, I.Ye. *Po povodu odnoy teoremy L. Chezari o sopryazhennykh funktsiyakh dvukh peremennykh* [On a theorem of Cesari on conjugate functions of two variables] [Text] // Reports of AN. – 1952. – Vol. 87. – N 6. – P. 887–880.
4. Konenkov, A.N. *Ogranichennost' operatora sopryazheniya v prostranstvakh Besova* [Boundedness of the operator interface in Besov's spaces] [Text] / A.N. Konenkov, A.I. Syusyukalov // Doklady RAN. – Reports of the Academy of Sciences. – 2004. – Vol. 397. – N 4. – P. 449–452.
5. Tribel, KH. *Teoriya funktsional'nykh prostranstv* [Theory of function spaces] [Text]. – Moscow : Peace, 1986.
6. Tribel', K.H. *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nyye prostranstva, differentsial'nyye operatory* [Interpolation theory, function spaces, differential operators] [Text]. – Moscow : Peace, 1980.
7. Chesari, L. Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di piu variabili [Text] // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. – 1938. – N 2. – P. 279–295.
8. Privaloff, I. Sur les fonctions conjuguees [Text] // Bull. Soc. Math. Fr. – 1916. – Vol. 44. – P. 100–103.

A.N. Konyonkov

CONJUGATION OPERATOR IN MULTIDIMENSIONAL SPACES OF PERIODIC FUNCTIONS

The article focuses on conjugators for spaces of periodic functions with several variables. The author presents a scale-space which depends on four parameters. This scale-space is a generalization of a scale of Besov spaces of periodic functions and when parameter 4 is zero the scale-space equals the scale of Besov spaces. The paper maintains that conjugator operates with a certain shift of parameter 4. When space dimension is more than 1, the smoothness of function is reduced. The paper proves that for multidimensional Gelder spaces the module of continuity of a complementary function can differ from the module of contitnuity of a Gelder space for the logarithm power, which depends on space dimension.
Gilbert transformation, complementary function, Besov space, Gelder space, Sigmund space.