УДК 517.958: 519.218

А.М. Лавров

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПАВУЛЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Рассматривается вопрос о переходной плотности, то есть фундаментальном решении кинетического уравнения Павулы для одномерной плотности вероятности нестационарного гауссовского случайного процесса. Полученные результаты можно применить к некоторым характерным задачам статистической радиофизики, теории случайных процессов и дифференциальных уравнений в частных производных.

гауссовский (нормальный) случайный процесс, кинетические коэффициенты, марковские и немарковские случайные процессы, переходная плотность, уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова.

В литературе (см., напр. [5; 9]) неоднократно подчеркивалось, что кинетическое уравнение для переходной плотности вероятности $w(x,t\,|\,x_0,t_0)$ случайного процесса $x(t)$, выведенное первоначально для марковских процессов,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A_1(x,t)\,w(x,t\,|\,x_0,t_0)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[A_2(x,t)\,w(x,t\,|\,x_0,t_0)] \qquad (1)$$

(так называемое уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК)), справедливо также и для немарковских процессов с последействием. При этом в марковском случае кинетические коэффициенты $A_n(x,t)$ определяются соотношением

$$A_n(x,t) = \lim_{\Delta\to+0}(1/\Delta)\langle[x(t+\Delta)-x(t)]^n\,|\,x(t)\rangle. \qquad (2)$$

В работе [11] американский математик Р. Павула вывел обобщенное уравнение ФПК на условную плотность вероятности $w(x,t\,|\,X,T)$, которое в явном виде отражает немарковость процесса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}[A_n(x,t;X,T)\,w(x,t\,|\,X,T)], \qquad (3)$$

где

$$A_n(x,t;X,T) = \lim_{\Delta\to+0}(1/\Delta)\langle[x(t+\Delta)-x(t)]^n\,|\,x,t,X,T\rangle; \qquad (4)$$

зависимость плотности вероятности $w(x,t|X,T)$ и кинетических коэффициентов $A_n(x,t;X,T)$ от множества фиксированных значений X,T процесса $x(t)$ отражает его немарковость.

Далее В.А. Казаковым [2] предложена новая форма записи кинетических коэффициентов, которая отличается от известного определения (4) и вместе с тем согласуется с выводом классического (1) и обобщенного (3) уравнений ФПК. Согласно [2], кинетические коэффициенты определяются в виде первой производной по времени от соответствующей условной моментной функции приращения случайного процесса

$$\alpha_n(\hat{t}|x,t,X,T) = \langle [x(\hat{t}) - x(t)]^n | x,t,X,T \rangle :$$
$$A_n(x,t;X,T) = \left. \frac{\partial \alpha_n(\hat{t}|x,t,X,T)}{\partial \hat{t}} \right|_{\hat{t} = t+0}. \tag{5}$$

В работах [3; 4; 7; 8] на основе новой формы записи (5) получены значения кинетических коэффициентов для *стационарных* немарковских случайных процессов гауссовского, релеевского и пирсоновского типа и проведено исследование соответствующих обобщенных уравнений ФПК. В данной работе нами начато решение аналогичной задачи для *нестационарного* гауссовского случайного процесса.

Рассмотрим гауссовский случайный процесс общего вида с достаточно гладкими корреляционными функциями

$$k_1(t) = m(t) \text{ и } k_2(t_1,t_2) = \sigma(t_1)\sigma(t_2)R(t_1,t_2) = \sigma_1\sigma_2R_{12},$$

где

$$\sigma_1 = \sigma(t_1) = \sqrt{k_2(t_1,t_1)}, \quad \sigma_2 = \sigma(t_2) = \sqrt{k_2(t_2,t_2)},$$
$$R_{12} = R(t_1,t_2) = \frac{k_2(t_1,t_2)}{\sqrt{k_2(t_1,t_1)}\sqrt{k_2(t_2,t_2)}}.$$

Вычисленные в работе [9] коэффициенты A_n

$$A_1(x,t) = m'(t) + \left[x - m(t)\right]\left[\frac{\sigma'(\hat{t})}{\sigma(t)} + \left.\frac{\partial R(\hat{t},t)}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}\right],$$
$$A_2(x,t) = -2\left[\sigma(t)\right]^2 \left.\frac{\partial R(\hat{t},t)}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}, \; A_n(x,t) \equiv 0 \text{ при } n \ge 3, \tag{6}$$

позволяют выписать для рассмотренного случая уравнение Павулы (3):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[m' + (x-m)\left(\frac{\sigma'}{\sigma} + \hat{R}'\right)\right]w\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-2\sigma^2\hat{R}'w\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[m'+(x-m)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)\right]w\right\}+\sigma^2\hat{R}'\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \tag{7}$$

где для краткости обозначено

$$m'=m'(t),\ \sigma'=\sigma'(t) \text{ и } \hat{R}'=\left.\frac{\partial R}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}.$$

В соответствии с теории этому уравнению должна удовлетворять одномерная гауссовская плотность распределения

$$w_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\exp\left\{-\frac{\left[x-m(t)\right]^2}{2\left[\sigma(t)\right]^2}\right\}, \tag{8}$$

что легко проверяется непосредственно.

В качестве примера рассмотрим нормальный марковский процесс с нулевым математическим ожиданием, постоянной дисперсией σ и корреляционной функцией

$$k_2(\hat{t},t)=\sigma^2 e^{-\alpha|\hat{t}-t|},\ \alpha>0.$$

Считая $\hat{t}>t$, получаем $R(\hat{t},t)=e^{-\alpha(\hat{t}-t)}$.

Вычислим коэффициенты A_1 и A_2 по формулам (6).

Так как $\hat{R}'\equiv\left.\frac{\partial R}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}=-\alpha e^{-\alpha(\hat{t}-t)}\Big|_{\hat{t}=t}=-\alpha$,

то $A_1(x,t)=m'+(x-m)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)=-\alpha x$ и $A_2(x,t)=-2\sigma^2\hat{R}'=2\sigma^2\alpha$.

Тем самым в рассматриваемом случае уравнение ФПК (7) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(-\alpha x w)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2\sigma^2\alpha w\right)\Leftrightarrow\frac{\partial w}{\partial t}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}(xw)+\sigma^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Этому уравнению удовлетворяет одномерная плотность распределения (8) при $m=0$ и $\sigma=\text{const}$:

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{10}$$

Однако, как известно (см., напр., [9]), помимо безусловной плотности (10), уравнению (9) при $t\neq t_0$ удовлетворяет также и условная (переходная) плотность

$$w(x,t\,|\,x_0,t_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left[1-e^{-2\alpha(t-t_0)}\right]}}\exp\left\{-\frac{\left[x-x_0 e^{-\alpha(t-t_0)}\right]}{2\sigma^2\left[1-e^{-2\alpha(t-t_0)}\right]}\right\},$$

которая представляет собой фундаментальное решение уравнения (9).

Возникает естественный вопрос: может быть, и в случае гауссовского процесса общего вида условная (переходная) плотность

$$w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left[\sigma\left(t\right)\right]^2\left\{1-\left[R\left(t,t_0\right)\right]^2\right\}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\left\{\left[x-m\left(t\right)\right]-\dfrac{\sigma(t)}{\sigma\left(t_0\right)}\left[x_0-m\left(t_0\right)\right]R\left(t,t_0\right)\right\}^2}{2\left[\sigma\left(t\right)\right]^2\left\{1-\left[R\left(t,t_0\right)\right]^2\right\}}\right\} \qquad (11)$$

при $t\neq t_0$ будет удовлетворять соответствующему уравнению Павулы (9)?

Покажем вначале, что $w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)$ образует дельта-образную последовательность при $t\to t_0$. Если бы при этом условная плотность $w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)$ удовлетворяла уравнению (9), то она являлась бы фундаментальным решением этого уравнения.

Проверим, что данная плотность $w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)$ как функция от «x» имеет дельта-образный вид. Точно это выражается следующими условиями [1]:

a) $\forall\, M>0$ при $|c|\leq M,\ |d|\leq M$ величины $\left|\int\limits_c^d w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)dx\right|$ ограничены постоянной, зависящей только от M;

b) при любых фиксированных $c,d\neq x_0$

$$\lim_{t\to t_0}\int\limits_c^d w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)dx=\begin{cases}1 \text{ при } c<x_0<d,\\ 0 \text{ при } c<d<x_0 \text{ и } x_0<c<d.\end{cases}$$

Обозначим $\sigma\left(t_0\right)=\sigma_0,\ m\left(t_0\right)=m_0$ и $R\left(t,t_0\right)=R$. С учетом этих, а также ранее приведенных обозначений $\sigma\left(t\right)=\sigma$ и $m\left(t\right)=m$ условная плотность (11) принимает вид

$$w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\left(1-R^2\right)}}\exp\left\{-\frac{\left[\left(x-m\right)-\left(x_0-m_0\right)\sigma R/\sigma_0\right]^2}{2\sigma^2\left(1-R^2\right)}\right\}. \qquad (12)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_c^d w(x,t\,|\,x_0,t_0)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-R^2)}}\int_c^d \exp\left\{-\frac{\left[(x-m)-(x_0-m_0)\sigma R/\sigma_0\right]^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}dx$$

и сделаем в нем замену переменной $\dfrac{(x-m)-(x_0-m_0)\sigma R/\sigma_0}{\sqrt{2\sigma^2(1-R^2)}} = y$.

Получим

$$\int_c^d w(x,t\,|\,x_0,t_0)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{y(c,t)}^{y(d,t)} e^{-y^2}dy,$$

где

$$y(b,t) = \frac{(b-m)-(x_0-m_0)\sigma R/\sigma_0}{\sqrt{2\sigma^2(1-R^2)}} \equiv$$

$$\equiv \frac{\left[b - x_0\dfrac{\sigma(t)}{\sigma(t_0)}R(t,t_0)\right] + \left[m(t_0)\dfrac{\sigma(t)}{\sigma(t_0)}R(t,t_0) - m(t)\right]}{\sqrt{2\left[\sigma(t)\right]^2\left\{1-\left[R(t,t_0)\right]^2\right\}}}. \qquad (13)$$

Заметим, что если $b < x_0$ (соответственно $b < x_0$), то при t, достаточно близких к t_0, числитель в (13) становится положительным (соответственно отрицательным), а так как знаменатель в (13) стремится к +0 при $t \to t_0$, то $\lim\limits_{t\to t_0} y(b,t) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{t\to t_0} y(b,t) = -\infty$) и

$$\lim_{t\to t_0}\int_c^d w(x,t\,|\,x_0,t_0)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = 1 \ \text{ при } \ c < x_0 < d, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{\pm\infty}^{\pm\infty} e^{-y^2}dy = 0 \ \text{ при } \ x_0 < c < d \ \text{ или } \ c < d < x_0, \end{cases}$$

то есть условие (b) выполнено.

Условие (a) также выполнено, так как $\forall c, d \in R$:

$$0 < \int_c^d w(x,t\,|\,x_0,t_0)dx < 1.$$

Переходим к вопросу о том, будет ли условная плотность вероятности (13), (14) удовлетворять уравнению ФПК (7), которое после вычисления производных во втором слагаемом принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)w+\left[m'+(x-m)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)\right]\frac{\partial w}{\partial x}+\sigma^2\hat{R}'\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (14)$$

Для этого найдем производные $\frac{\partial w}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ функции $w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)$ и подставим их в уравнение (14).

Опуская несущественный постоянный множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и обозначая оставшуюся функцию по-прежнему как $w=\frac{e^-}{\sigma\sqrt{1-R^2}}$, получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\sigma' e^-}{\sigma^2\sqrt{1-R^2}}+\frac{R\frac{\partial R}{\partial t}e^-}{\sigma\left(1-R^2\right)^{3/2}}+\frac{e^-}{\sigma^4\left(1-R^2\right)^{5/2}}\left\{\sigma\left(1-R^2\right)\times\right.$$

$$\times\left[(x-m)-\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R\right]\cdot\left[m'+\frac{\sigma'}{\sigma_0}(x_0-m_0)R+\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)\frac{\partial R}{\partial t}\right]+$$

$$\left.+\left[(x-m)-\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R\right]^2\left[\sigma'\left(1-R^2\right)-\sigma R\frac{\partial R}{\partial t}\right]\right\};$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{(x-m)-(x_0-m_0)\sigma R/\sigma_0}{\sigma^3\left(1-R^2\right)^{3/2}}e^-;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=e^-\left\{\frac{\left[(x-m)-(x_0-m_0)\sigma R/\sigma_0\right]^2}{\sigma^5\left(1-R^2\right)^{5/2}}-\frac{1}{\sigma^3\left(1-R^2\right)^{3/2}}\right\}.$$

Подставляя найденные производные в уравнение (14), умножая обе части на $\sigma^5\left(1-R^2\right)^{3/2}$ и сокращая на $e^-\neq 0$, после приведения подобных получаем

$$\sigma^2 R\frac{\partial R}{\partial t}+\sigma^2\hat{R}'\left(1-R^2\right)+$$

$$+\left[(x-m)-\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R\right]\cdot\left[m'+\frac{\sigma'}{\sigma_0}(x_0-m_0)R+\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)\frac{\partial R}{\partial t}\right]+$$

$$+\left[(x-m)-\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R\right]^2\cdot\left(\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{R\,\partial R/\partial t}{1-R^2}\right)-$$

$$-\left[m'+(x-m)\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)\right]\times\left[(x-m)-(x_0-m_0)\sigma R\big/\sigma_0\right]+$$

$$+\hat{R}'\left\{\frac{\left[(x-m)-(x_0-m_0)\sigma R\big/\sigma_0\right]^2}{1-R^2}-\sigma^2\right\}\equiv 0\,.$$

Выражение, стоящее в левой части, есть многочлен второй степени от $(x-m)$. Так как он тождественно равен нулю, то его коэффициенты также должны быть нулевыми. В частности, для коэффициента при $(x-m)^2$ получаем

$$\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{R\,\partial R\big/\partial t}{1-R^2}-\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)+\frac{\hat{R}'}{1-R^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R\frac{\partial R}{\partial t}-\hat{R}'\left(1-R^2\right)+\hat{R}'=0\Rightarrow -R\frac{\partial R}{\partial t}-\hat{R}'+R^2\hat{R}'+\hat{R}'=0\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial t}=\hat{R}'\cdot R$$

или, более подробно,

$$\frac{\partial R(t,t_0)}{\partial t}=R(t,t_0)\left.\frac{\partial R(\hat{t},t)}{\partial\hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}. \tag{15}$$

Покажем, что при этом тождественно равны нулю коэффициент при $(x-m)$ и свободный член.

Для коэффициента перед $(x-m)$ имеем

$$m'+\frac{\sigma'}{\sigma_0}(x_0-m_0)R+\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)\frac{\partial R}{\partial t}-2\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R\left(\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{R\,\partial R\big/\partial t}{1-R^2}\right)-m'+$$

$$+\left(\frac{\sigma'}{\sigma}+\hat{R}'\right)\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R-2\frac{\hat{R}'}{1-R^2}\frac{\sigma}{\sigma_0}(x_0-m_0)R\equiv 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial t}+R\hat{R}'+\frac{2R^2\,\partial R\big/\partial t}{1-R^2}-\frac{2R\hat{R}'}{1-R^2}\equiv 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial t}+R\hat{R}'-R^2\frac{\partial R}{\partial t}-R^3\hat{R}'+2R^2\frac{\partial R}{\partial t}-2R\hat{R}'\equiv 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial t}\left(1+R^2\right)-R\hat{R}'\left(1+R^2\right)\equiv 0\Rightarrow\frac{\partial R}{\partial t}-R\hat{R}'\equiv 0,$$

что истинно ввиду (15).

Для свободного члена имеем

$$\sigma^2 R\frac{\partial R}{\partial t}+\sigma^2\hat{R}'\left(1-R^2\right)-$$

$$-\frac{\sigma}{\sigma_0}\left(x_0-m_0\right)R\cdot\left[m'+\frac{\sigma'}{\sigma_0}\left(x_0-m_0\right)R+\frac{\sigma}{\sigma_0}\left(x_0-m_0\right)\frac{\partial R}{\partial t}\right]+$$

$$+\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\left(x_0-m_0\right)^2 R^2\cdot\left(\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{R\,{\partial R}/{\partial t}}{1-R^2}\right)+m'\frac{\sigma}{\sigma_0}\left(x_0-m_0\right)R+$$

$$+\hat{R}'\left\{\frac{\left[\left(x_0-m_0\right)\sigma R/\sigma_0\right]^2}{1-R^2}-\sigma^2\right\}\equiv 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2\left(\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{R\,{\partial R}/{\partial t}}{1-R^2}\right)-R\left(\frac{\sigma'}{\sigma}-\frac{R\,{\partial R}/{\partial t}}{1-R^2}\right)+\hat{R}'\frac{R^2}{1-R^2}\equiv 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{\partial R}{\partial t}-R^2\frac{{\partial R}/{\partial t}}{1-R^2}+\hat{R}'\frac{R}{1-R^2}\equiv 0\Rightarrow-\frac{\partial R}{\partial t}+R^2\frac{\partial R}{\partial t}-R^2\frac{\partial R}{\partial t}+\hat{R}'R\equiv 0,$$

что также истинно ввиду (15).

Тем самым условная плотность $w\left(x,t\,|\,x_0,t_0\right)$ (11), (12) удовлетворяет уравнению ФПК (7) тогда и только тогда, когда выполняется условие (15):

$$\frac{\partial R\left(t,t_0\right)}{\partial t}=R\left(t,t_0\right)\left.\frac{\partial R\left(\hat{t},t\right)}{\partial\hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}.$$

В частности, для стационарных марковских процессов

$$R\left(t_1,t_2\right)=e^{-\alpha\left|t_1-t_2\right|}=e^{-\alpha\left(t_1-t_2\right)}\ \text{при}\ t_1>t_2.$$

Следовательно, считая $t>t_0$ и $\hat{t}>t$, получаем:

$$\frac{\partial R\left(t,t_0\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\alpha\left(t-t_0\right)}\right)=-\alpha e^{-\alpha\left(t-t_0\right)};$$

$$\left.\frac{\partial R\left(\hat{t},t\right)}{\partial\hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}=\left.\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\alpha\left(\hat{t}-t\right)}\right]\right|_{\hat{t}=t+0}=\left.-\alpha e^{-\alpha\left(\hat{t}-t\right)}\right|_{\hat{t}=t+0}=-\alpha,$$

а значит и правая часть (15) будет иметь вид

$$R(t,t_0)\left.\frac{\partial R(\hat{t},t)}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0} = e^{-\alpha(t-t_0)}(-\alpha) \equiv \frac{\partial R(t,t_0)}{\partial t},$$

то есть для марковских процессов условие (15) выполнено.

Решим уравнение (15) в общем виде. Поделив обе части (15) на $R(t,t_0)$, получим

$$\frac{1}{R(t,t_0)}\frac{\partial R(t,t_0)}{\partial t} = \left.\frac{\partial R(\hat{t},t)}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0}.$$

Правую часть, зависящую только от t, обозначим как $f(t)$. Тогда

$$\frac{1}{R(t,t_0)}\frac{\partial R(t,t_0)}{\partial t} = f(t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\left|R(t,t_0)\right|\right] = f(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|R(t,t_0)\right| = \int f(t)dt + h(t_0) = g(t) + h(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|R(t,t_0)\right| = e^{g(t)+h(t_0)} \Rightarrow R(t,t_0) = G(t)\cdot H(t_0).$$

Подставим это выражение в уравнение (15). Имеем

$$R(\hat{t},t) = G(\hat{t})\cdot H(t) \Rightarrow \left.\frac{\partial R(\hat{t},t)}{\partial \hat{t}}\right|_{\hat{t}=t+0} = G'(t)\cdot H(t),$$

и (15) превращается в

$$G'(t)\cdot H(t_0) \equiv \left[G(t)\cdot H(t_0)\right]\left[G'(t)\cdot H(t)\right] \Rightarrow G(t)\cdot H(t) \equiv 1 \Rightarrow H(t) = \frac{1}{G(t)},$$

то есть при $t > t_0$

$$R(t,t_0) = \frac{G(t)}{G(t_0)}. \qquad (16)$$

В частности, для стационарных марковских процессов при $t > t_0$

$$R(t,t_0) = e^{-\alpha(t-t_0)} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t_0}}, \text{ то есть } G(t) = e^{-\alpha t}.$$

Взяв $s < t < \tau$, из (16) получаем

$$R(\tau,t) = \frac{G(\tau)}{G(t)};\ R(t,s) = \frac{G(t)}{G(s)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(\tau,t)\cdot R(t,s) = \frac{G(\tau)}{G(t)}\frac{G(t)}{G(s)} = \frac{G(s)}{G(t)} = R(\tau,s),$$

то есть

$$\forall\, s \le t \le \tau,\ R(\tau,t)\cdot R(t,s) = R(\tau,s). \tag{17}$$

В соответствии с работой [10, т. 2] условие (17) характеризует **марковские** процессы. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема. Условная (переходная) плотность вероятности

$$w(x,t\,|\,x_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma(t)]^2\left\{1-[R(t,t_0)]^2\right\}}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\left\{[x-m(t)]-\dfrac{\sigma(t)}{\sigma(t_0)}R(t,t_0)\,[x_0-m(t_0)]\right\}^2}{2[\sigma(t)]^2\left\{1-[R(t,t_0)]^2\right\}}\right\}$$

является фундаментальным решением уравнения типа ФПК

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[m'(t)+[x-m(t)]\left[\frac{\sigma'(\hat t)}{\sigma(t)}+\left.\frac{\partial R(\hat t,t)}{\partial \hat t}\right|_{\hat t = t+0}\right]\right]w\right\}+$$

$$+\sigma^2\left[\left.\frac{\partial R(\hat t,t)}{\partial \hat t}\right|_{\hat t = t+0}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

тогда и только тогда, когда нормированная корреляционная функция $R(t,t_0)$ случайного процесса удовлетворяет условию

$$\forall\, s \le t \le \tau,\ R(\tau,t)\cdot R(t,s) = R(\tau,s),$$

то есть тогда и только тогда, когда рассматриваемый процесс – марковский.

Следствие. Если известно дополнительно, что $R(t,t_0)=R(t-t_0)$, то из (17) следует, что $R(t,t_0)=e^{-\alpha|t-t_0|}$ (см. [10, т. 1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними [Текст] / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М. : ГИФМЛ, 1958. – 439 с.

2. Казаков, В.А. Кинетические коэффициенты в прямом уравнении для дифференцируемых процессов с последействием [Текст] // Изв. вузов. Радиофизика. – 1986. – Т. 29, № 11. – С. 1344–1354.

3. Казаков, В.А. Кинетические уравнения для немарковских процессов с пирсоновскими распределениями [Текст] / В.А. Казаков, А.М. Лавров // Изв. вузов. Радиофизика. – 1995. – Т. 38, № 7. – С. 695–704.

4. Казаков, В.А. О связи между кинетическими уравнениями различных видов [Текст] / В.А. Казаков, А.М. Лавров // Изв. вузов. Радиофизика. – 1993. – Т. 36, № 10. – С. 944–948.

5. Кузнецов, П.И. Корреляционные функции в теории броуновского движения. Обобщение уравнения Фоккера – Планка [Текст] / П.И. Кузнецов, Р.Л. Стратонович, В.И. Тихонов // ЖЭТФ. – 1954. – Т. 26. – Вып. 2. – С. 189–207.

6. Лавров, А.М. Вычисление кинетических коэффициентов, входящих в обобщенное уравнение ФПК для нестационарного гауссовского случайного процесса [Текст] // Математические методы в научных исследованиях : сб. науч. тр. / РГРТА. – Рязань, 2002. – С. 23–29.

7. Лавров, А.М. Исследование кинетического уравнения Павулы в случае немарковских процессов с пирсоновскими распределениями [Текст] // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. – Рязань, 1996. – Вып. 1. – С. 58–64.

8. Лавров, А.М. Исследование кинетического уравнения Павулы в случае релеевского случайного процесса [Текст] // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. – Рязань, 1998. – Вып. 5. – С. 45–49.

9. Стратонович, Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике [Текст]. – М. : Сов. радио, 1961. – 558 с.

10. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] : в 2 т. – Т. 1. – М. : Мир, 1984. – 528 с. ; Т. 2. – 738 с.

11. Pawula, R.F. Generalizations and Extensions of the Fokker-Planck-Kolmogorov Equations [Text] // Trans. IEEE. – 1967. – Vol. 1. – T. 3, № 1. P. 33–41.

A.M. Lavrov

PAWULA'S KINETIC EQUATION FOR NON-STATIONARY GAUSSIAN RANDOM PROCESSES

The paper deals with transitive density, i.e. the fundamental solution of Pawula's kinetic equation for one-dimensional probability density function of non-stationary Gaussian random processes. The obtained results are applicable to statistical radiophysics, theory of casual processes and partial differential equations.

Markov and non-markov random processes, Fokker-Planck-Kolmogorov equation, kinetic coefficients, transition density function, Gaussian (normal) random processes.