

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОБЩЕСТВЕ

Экономико-математические модели широко используются в вопросах прогноза развития в финансовой сфере. Более сложно предложить адекватные модели для социальной сферы. Это связано со сложной формализацией отношений между членами социума. В работе дается краткий обзор классических моделей социально-экономических процессов, которые базируются на аппарате разностных схем и дифференциальных уравнений. Наиболее распространенным в данных моделях является уравнение Ферхюльста – Перла. Предлагаемая автором модель расчета эффективности предвыборной кампании основывается на некотором перечне различных аксиом, отражающих экономические, психологические и социальные аспекты подготовки к выборам. Работа полезна в качестве интересного примера моделирования, приводящего к стандартному виду кривой поведения исследуемых показателей и уравнения Ферхюльста – Перла.

экономико-математические модели, уравнение Ферхюльста – Перла.

Огромное количество работ посвящено математическому моделированию в экономике. Использование моделей в социально-политических вопросах считается менее плодотворным и эффективным, что в значительной мере объясняется сложными законами, которые не поддаются формализации в рамках классической математики. Именно этот факт явился серьезным стимулом развития новых направлений исследований: теорий нечетких множеств, логических основ принятия групповых решений (теорема Эрроу), кластерного анализа и т.д. Тем не менее, существуют классические модели социально-экономических, политических, психологических взаимоотношений, позволяющие делать полезные прогнозы и выводы.

Уравнение Ферхюльста – Перла возникает в целом ряде моделей, оно оказалось основным в предложенном автором подходе, который излагается в данной работе. Рассмотрим наиболее известные модели перечисленного типа.

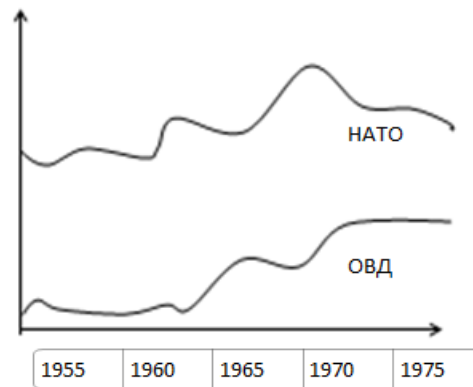
Модель Ричардсона «Гонки вооружений». Будем считать, что государство X ощущает наличие военной угрозы со стороны противника, государства Y . Чем большим военным потенциалом обладает Y , тем больше старается вооружаться X в ответ на воспринимаемую угрозу. Однако оба государства обязаны решать насущные и текущие внутренние задачи и не могут весь экономический потенциал перевести на военные рельсы. Кроме того, наличие большого военного арсенала требует пропорциональных затрат на его поддержание. Существует стационарная составляющая затрат, заложенная во внутренние планы модернизации вооружений. С математической точки зрения вышесказанное сводится к системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} X_{t+1} = kY_t - aX_t + g \\ Y_{t+1} = mX_t - bY_t + f \end{cases} \quad (1)$$

Считается, что расчетным периодом является один год. X_t , Y_t обозначают величины уровня вооружений в соответствующие годы. Второе уравнение свидетельствует о подобию взгляда на вопросы вооружения в государстве Y . Параметры (a, b) характеризуют уровень взаимного доверия; (k, m) – уровень технологической организованности; (g, f) – объем внутренних затрат государств. Модель очень проста, но позволяет прогнозировать затраты на вооружение на годы вперед.

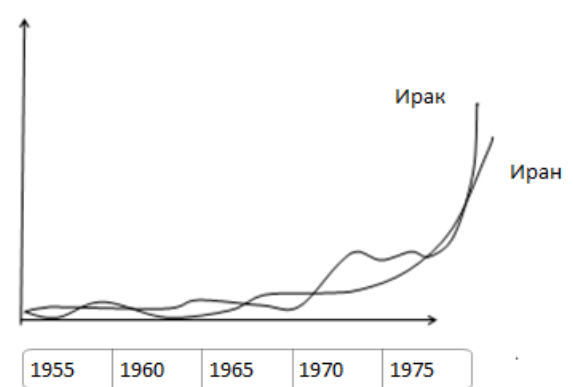
В 1970-х годах представленная модель использовалась десятки раз и давала приемлемые прогнозы для самых разных противоборствующих сторон. Ниже приведены графики гонки вооружений между НАТО и ОВД (рис. 1) и Ираном и Ираком (рис. 2).

На рисунке 1 гонка вооружений носит стабильный характер ($k, m \sim 1,15 - 1,20$); на рисунке 2 представлена нестабильная гонка вооружений, где (k, m) – возрастающая функция времени. На основе этой простой модели было проанализировано около ста международных конфликтов в XIX–XX веках и с большой



Стабильная гонка вооружений

Рис. 1



Нестабильная гонка вооружений

Рис. 2

точностью предсказаны войны в случае нестабильной гонки вооружений.

Модель стационарного процесса воспроизводства населения. Пусть $N(t)$ – численность населения в момент времени t . Будем считать данную модель непрерывной. За промежуток времени Δt естественный прирост населения составит $b \cdot t \cdot N(t)$, где b называется коэффициентом рождаемости. Естественная убыль населения за промежуток Δt составит $\Delta t = d \cdot t \cdot N(t)$, где d – коэффициент смертности.

Имеем соотношение

$$N(t+\Delta t)=N(t)+\Delta t \cdot(b-d) \cdot N(t) . \quad (2)$$

Получается простейшее дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{dt}=(b-d) \cdot N . \quad (3)$$

Его решение $N(t)=N(0) \cdot e^{(b-d)t}$ сводится либо к чистому вымиранию населения, либо к экспоненциальному его росту. Это уравнение слишком грубое для реальных прогнозов.

Модель сбалансированного изменения численности населения. Будем считать, что

$$\frac{dN}{dt}=f(N) \quad (4)$$

где $f(N)$ – логично выбранная функция скорости роста численности населения. Общепринятый выбор этой функции определяется равенством

$$f(N)=N \cdot(r-s \cdot N), \quad (5)$$

где s и r – некоторые положительные константы, $r > s \cdot N(0)$.

Отрицательный член $s \cdot N$ появляется в виде так называемого «эффекта отравления»: увеличение численности населения ведет к ухудшению условий жизни, а следовательно к уменьшению скорости роста его численности. При малых N скорость роста близка к экспоненциальной. Когда N близка к $\frac{r}{s}$, скорость роста уменьшается.

Уравнение (4) принадлежит к типу Ферхюльста – Перла (см. рис. 3), допускающее разделение переменных и простое явное решение:

$$N(t)=\frac{r \cdot N(0)}{s \cdot N(0)}+(r-s \cdot N(0)) \cdot e^{-rt} .$$

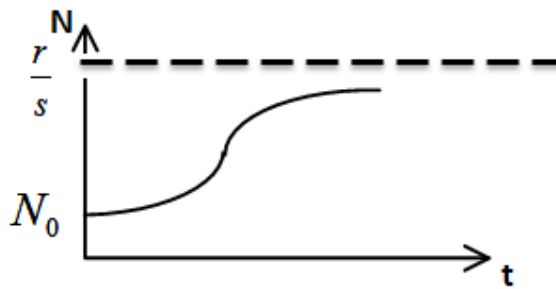


Рис. 3

Модель добровольной мобилизации. Под этим термином понимается вовлечение населения в некоторую деятельность. Скорость такого вовлечения зависит от текущего числа вовлеченных, успехов текущей кампании и текущих неудач. Если $y(t)$ – доля вовлеченных в момент времени t , то соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = g(1-y) - hy, \quad (8)$$

где $g > 0$ – коэффициент успешности, $h > 0$ – коэффициент разочарования. Решение уравнения (8) определяется равенством

$$y(t) = \frac{g}{g+h} + \left[y(0) - \frac{g}{g+h} \right] \cdot e^{-(g+h)t} \quad (9)$$

График и асимптотика этой функции представлены на рисунке 4:

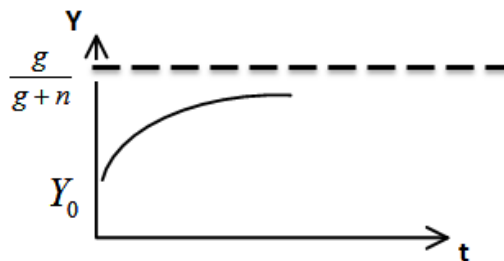


Рис. 4

Модель объема приобретения бытовой техники. Пусть $y(t)$ – количество техники (телевизоров, холодильников, компьютеров) в момент t , Q – ежегод-

ный объем приобретения, T – средний срок эксплуатации. Величина $\frac{y(t)}{T}$ – объем выбытия техники из эксплуатации в году t . За время Δt динамику выбытия запишем в виде формулы

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot \left(\theta - \frac{y(t)}{T} \right). \quad (10)$$

Считается, что все объемы изменения численности пропорциональны промежутку времени Δt . Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Q - \frac{y}{T} \quad (11)$$

имеет решение

$$y(t) = Q \cdot T - [Q \cdot T - y(0)] \cdot e^{-\frac{t}{T}}. \quad (12)$$

Потребление техники выходит на стационарный режим, равный $Q \cdot T$ в год. Например, при ежегодной продаже 1 800 000 телевизоров в год и среднем сроке эксплуатации 10 лет общее количество этой техники будет составлять примерно 18 000 000 в год.

Модель распространения информации. Пусть $x(t)$ – доля людей, владеющих информацией в момент t . Скорость увеличения этой доли зависит от уровня коммуникаций ($a > 0$) и от числа возможных контактов с теми, кто владеет информацией. Доля населения, которая этой информацией не владеет составит $1 - x(t)$. По аналогии с предыдущими рассуждениями имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x) \quad (13)$$

Это уравнение относится к классу Ферхюльста – Перла, и его решение примет вид

$$x(t) = \frac{x(0)}{x(0) + (1 - x(0)) \cdot e^{-at}} \quad (14)$$

график которого представлен на рисунке 5.

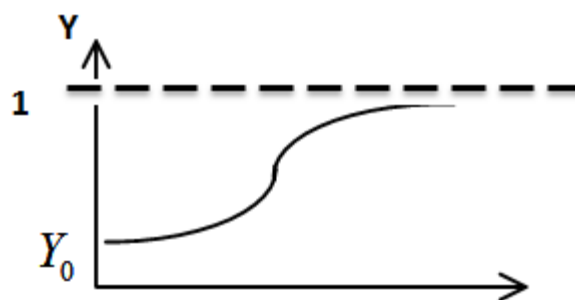


Рис. 5

Модель роста численности специалистов. Скорость роста численности как обычно пропорциональна самой численности. В то же время чем больше специалистов в рассматриваемой области, тем труднее им найти работу. Часть специалистов может уходить из данной области, что тоже пропорционально численности $x(t)$.

Модель роста численности специалистов имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x) - \alpha x \quad (15)$$

где a – коэффициент роста численности специалистов, α – коэффициент их оттока.

Модель противостояния двух государств за доминирование влияния над третьей. Будем считать методом воздействия на индивидуума его финансовое стимулирование. Величину выделения средств на требуемые нужды будем считать дискретной. Страной I на один год t выделяются средства в объеме α_t , а противоборствующей страной II в объеме β_t , общая численность контингента воздействия – N (активная часть населения страны III) (рис. 6). Обозначим через x_t количество людей в году t , лояльных стране I. Тогда $(N - x_t)$ – количество людей, на которых направлено воздействие страны I. На начальном этапе противостояния стран число лояльных лиц есть x_t . Лица, лояльные стране I, являются субъектами воздействия страны II.

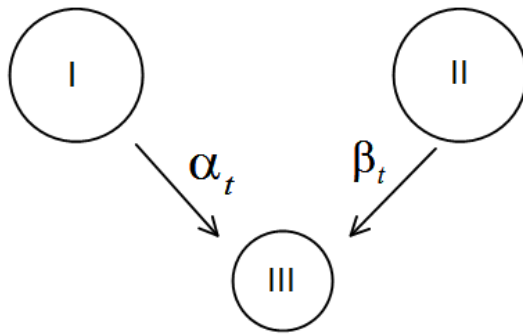


Рис. 6

Примем ряд разумных допущений:

1) Для привлечения на свою сторону индивидуума требуется известный объем средств S . Конечно, эта сумма не является для всех единой, но есть некоторое среднее значение. По экспертным оценкам, для стран с развивающейся экономикой эта сумма может составлять половину годового дохода.

2) Эффективность использования средств в размере $\alpha_t \leq S$ пропорциональна $\frac{\alpha_t}{S}$.

3) Коэффициент психологического воздействия на индивидуума обосновывается фактором доли населения, поддерживающего ту или иную страну: $\frac{x_t}{N}$ или $\frac{N - x_t}{N}$ (один из законов Паркинсона).

4) В условиях противостояния двух сторон коэффициенты воздействия каждой принимаем $K_1 = \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \beta_t}$, $K_2 = \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t}$, $K_1 + K_2 = 1$.

На основании сделанных допущений разностное уравнение будет иметь вид

$$x_{t+1} = x_t + (N - x_t) \cdot \frac{\alpha_t}{S} \cdot \frac{x_t}{N} \cdot \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \beta_t} - x_t \cdot \frac{\beta_t}{S} \cdot \frac{N - x_t}{N} \cdot \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t} \quad (16)$$

Отрицательное слагаемое обосновывается деятельностью страны II, направленной на часть населения x_t и осуществляемое по тем же законам, что и страной I. Разностное уравнение (16) приводится к виду

$$x_{t+1} = x_t + \frac{(N-x_t)}{S \cdot N} \cdot x_t \cdot (\alpha_t - \beta_t) \quad (17)$$

Это уравнение представляет собой разностный аналог уравнения Ферхюльста – Перла.

Из уравнения (17) можно сделать ряд выводов:

1. Эффективность противодействия одной страны другой зависит от разности выделенных средств.

2. В случае $\alpha_t \geq \beta_t$ существует $P = \lim_{t \rightarrow \infty} x_t$.

Нетрудно показать, что значения x_t являются возрастающими и ограниченными, что обосновывает существование предела.

В предложенной модели важными являются ограничения на бюджет, выделяемый странами. За период T страна I истратит средства в размере $\sum_{t=1}^T (N - x_t) \cdot \alpha_t$, страна II – $\sum_{t=1}^T x_t \cdot \beta_t$.

Интересны следующие задачи:

1. Имея ограниченный бюджет каждой страны

$$\sum_{t=1}^T (N - x_t) \cdot \alpha_t \leq S_1 \quad \sum_{t=1}^T x_t \cdot \beta_t \leq S_2 \quad (18)$$

предложить тактику, обеспечивающую $\max_{\alpha_t} x_t$ для страны I и $\min_{\beta_t} x_t$ для страны II.

2. В условиях ограничения (18) выбрать такой объем средств α_t , который обеспечивает критерий

$$\max_{\alpha_t} \min_{\beta_t} x_t \quad (19)$$

Рассмотрим результаты моделирования эффективности использования средств в задаче доминирования двух стран над третьей.

Ранее был введен разностный аналог уравнения Ферхюльста – Перла (17)

$$x_{t+1} = x_t + \frac{(N - x_t)}{S \cdot N} \cdot x_t \cdot (\alpha_t - \beta_t).$$

При приведенных ниже параметрах системы получаем следующую картину: N – принято равным 1 000 000 человек (доля активного населения составляет примерно 10 %, что оправдывает величину N); $x_0 = 10\,000$ – количество людей, лояльных стране I в начальный момент времени; $\Delta t = 0,3S$ для всех t , $(a_t - b_t) = \Delta t$ – управляющее воздействие на состояние системы x_t .

Анализируя рисунок 7, можно сделать вывод, что, имея на своей стороне лишь 1 % населения, через $T = 30$ лет непрерывного «поощрения» за страну I будет практически все население страны. Программа позволяет вычислить необходимый бюджет. Например, при $S = 2500$ он составит

$$\sum_{t=0}^T (N - x_t) \cdot \alpha_t = 12,8 \text{ млрд.}$$

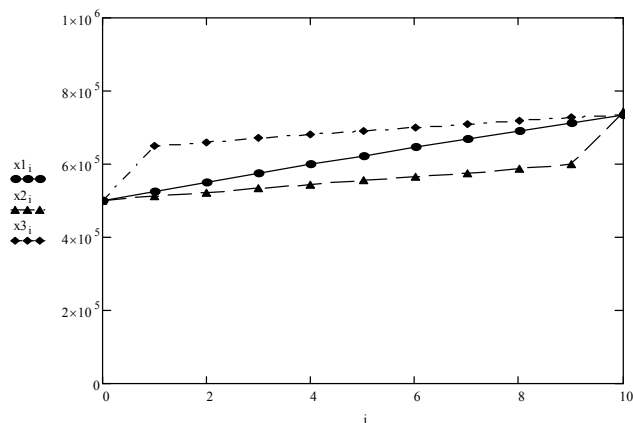


Рис. 7

На рисунке 8 можно увидеть, что наибольшая скорость увеличения «лояльности», если одинаковых бюджетных расходах имеет место, если $30\% < \frac{x_t}{N} < 70\%$. Отсюда можно сделать вывод, что в указанном диапазоне «экономия бюджета» нерациональна.

Рассмотрим некоторые тактики распределения бюджета.

Предложены 3 тактики, когда страна I выделяет средства:

1. Равномерно ●
2. В конце периода ▲
3. В начале периода ◆

В тактиках 2 и 3 подразумевается, что в начале или в конце периода выделяются большая часть бюджета ($\alpha_t = 0,6 \cdot S$), а оставшиеся средства выделяются равными долями.

Исходные параметры: $x_0 = 500\,000$ человек.

Как видим, по истечении периода в 10 лет стране I будут лояльны:

- 1) 733,4 тысячи человек (73,34 %).
- 2) 743,2 тысячи человек (74,32 %).
- 3) 735,5 тысячи человек (73,55 %).

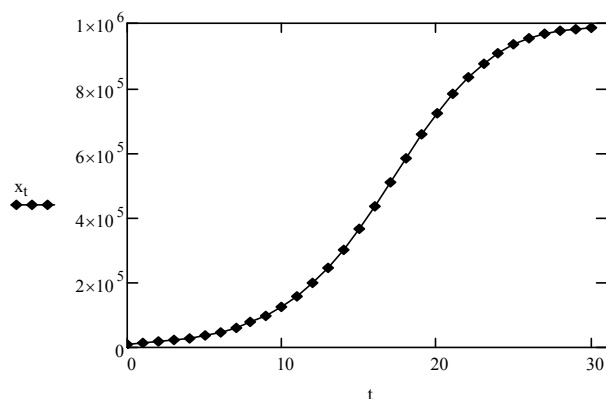


Рис. 8

В предложенных условиях распределение бюджета наиболее эффективно во втором случае. Однако по указанным результатам нельзя сделать определенного вывода для общих условий моделирования. Точное решение задачи требует применения оптимизации методом динамического программирования.

Рассмотрим более реальный пример и выберем наиболее эффективную тактику в каждой ситуации (рис. 9).

Начальные параметры: лояльно 50 % населения ($x_0 = 500\,000$ человек), бюджеты обеих сторон равны ($S_1 = S_2$).

Случай первый.

Страна II распределяет бюджет, используя тактику 1.

Страна I выделяет средства:

1. Равномерно ●
2. В конце периода ▲
3. В начале периода ◆

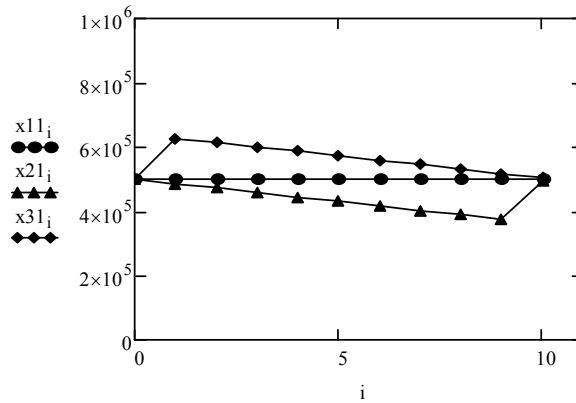


Рис. 9

По истечении десятилетия имеем следующие результаты:

- 1) $x_T = 500$ тысяч (лояльное население не изменилось).
- 2) $x_T = 494,3$ тысячи (уменьшилось на 0,37 %).
- 3) $x_T = 503,5$ тысячи (увеличилось на 0,35 %).

Аналогичная ситуация наблюдается и в случаях тактик 2 и 3, используемых страной II.

Однако такое распределение не является панацеей. Оно хорошо себя зарекомендовало в случае, когда доля лояльного населения составляет 50 %.

Рассмотрим еще один пример.

Допустим, страна I располагает бюджетом в 4 раза превосходящим бюджет страны II, но при этом доля лояльного населения составляет лишь 20 % ($x_0 = 200\,000$ человек) (см. рис. 10).

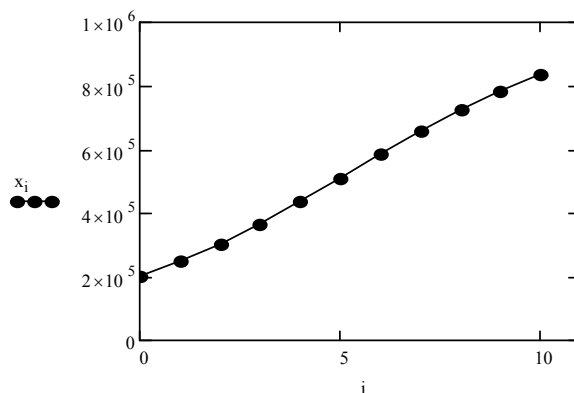


Рис. 10

Рассмотрим тактику 1, используемую обеими сторонами: $a_t = 0,4 S$, $b_t = 0,1 S$.

Эта тактика оправдана для страны I с учетом ранее сделанных замечаний об интервале наиболее эффективного бюджетного воздействия.

Таким образом, мы получаем к концу десятилетия 836,3 тысячи лояльных граждан (83,63 %).

Необходимый для этого бюджет при $S = 2500$ должен составить у страны I примерно 5,2 миллиарда, у страны II – примерно 1,3 миллиарда.

Постановка оптимизационной задачи минимизации используемого бюджета для достижения уровня доминирования. Состояние системы описывается разностным уравнением (17). Начальное состояние – x_0 , целевое состояние – x_T , период распределения средств – T .

Необходимо найти оптимальную тактику распределения бюджета, при которой целевое состояние будет достигнуто с минимальными затратами, то есть выбрать Δt , обеспечивающий критерий (19) $\Delta t = \max_{\alpha_t} \min_{\beta_t} x_t$.

Так как аналитическое исследование довольно сложно, были использованы численные методы.

Используя формулу затрат для временного периода $T = 2$,

$$f(x_1) = \Delta t_1 + \Delta t_2 = N \cdot S \cdot \left[\frac{x_1 - x_0}{(N - x_0) \cdot x_0} + \frac{x_2 - x_1}{(N - x_1) \cdot x_1} \right] \quad (20)$$

где x_1 – промежуточный целевой уровень.

При параметрах $N = 1\,000\,000$, $S = 2500$, $x_0 = 200\,000$, $x_2 = 800\,000$ можно отметить, что в качестве промежуточного целевого уровня следует взять $x_1 = 373\,300$.

В этом случае $\Delta t_1 = 2708$, а $\Delta t_2 = 4560$. Тогда при $\beta_t = 0,5 \cdot S$ для всех t бюджет страны I составит примерно 6,8 миллиарда и у страны II примерно 0,72 миллиарда (см. рис. 11).

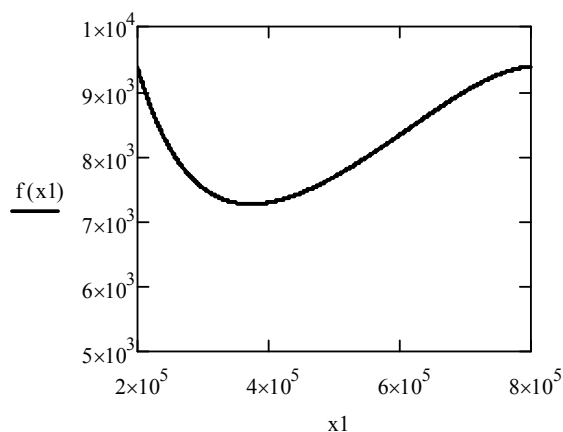


Рис. 11

Таким образом, при вышеизложенных параметрах для достижения целевого уровня стране I необходимо обладать ресурсами в 9,4 раза большими, чем стране II.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мангейм, Дж.Б. Политология. Научные методы исследования [Текст] / Дж.Б. Мангейм, Р.К. Рич. – М. : Весь Мир, 1997.
2. Лебедев, В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов [Текст]. – М. : Изограф, 1997.
3. Малыгин, В.И. Социально-экономическая структура общества [Текст]. – М. : ЮНИТИ, 2003.

V.A. Pavlov

MATHEMATICAL MODELING OF SOCIAL-ECONOMIC PROCESSES

Economic-mathematical modeling is widely used to predict financial development. The prognostication of social development is a more challenging task. The paper provides a review of classical models of social-economic processes. The majority of models are based on the Ferhulst-Pearl equation. The model suggested by the author can be used to predict the effec-

tiveness of an election campaign. The model is based on a number of axioms reflecting economic, psychological and social aspects of an election campaign.

economic-mathematical modeling, Ferhulst-Pearl equation.