УДК 513.812

Г.В. Киотина

КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ В БИФЛАГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ F_3^2

Методом внешних форм Картана изучаются комплексы прямых в одном из бифлаговых пространств гиперболического типа, введенных автором. Доказано, что в этом пространстве в окрестности нулевого порядка существуют 6 видов неспециальных комплексов и 4 вида специальных комплексов. Для каждого из них строится подвижный репер I или II порядка.

абсолют, автоморфизмы, группа, дифференцирование внешнее, измерение инвариантное, кривизна, метод внешних форм, окрестность, подвижный репер, канонический репер.

Бифлаговые пространства являются частными видами пространств с обобщенной проективной метрикой, введенных автором [1]. Абсолюты бифлаговых 3-пространств гиперболического типа состоят из двух флагов, соединенных таким образом, чтобы группы их проективных автоморфизмов имели такую же подвижность, что и движения классических неевклидовых пространств. Имеются два типа бифлаговых 3-пространств F_3^2 и $\overline{F}_3^2$, отличающихся взаимным расположением пар точек по отношению к парам прямых и плоскостей. Комплексы прямых в пространстве $\overline{F}_3^2$ рассмотрены в [2] и [3]. В данной работе изучаются комплексы прямых в пространстве F_3^2.

Абсолют пространства F_3^2 состоит из абсолюта флагового пространства: $P_2^1 \supset P_1^2 \supset P_0^2$ и плоскости P_2^2, занимающей общее положение по отношению к выбранному «флагу». В плоскости P_2^2 индуцируется «флаг»: $P_1^1 \equiv P_2^2 \cap P_2^1$ и $P_0^1 \equiv P_2^2 \cap P_1^2$. Очевидно, что абсолют пространства F_3^2 зависит от девяти параметров, следовательно, группа проективных автоморфизмов пространства F_3^2 зависит от шести параметров.

Выберем подвижный проективный репер $R(E_0 E_1 E_2 E_3 E)$ проективного 3-пространства таким образом, чтобы квадрика K_2, распавшаяся на плоскости P_2^1 и P_2^2, задавалась уравнением $x_0^2 - x_1^2 = 0$, точка P_0^1 (абсолютная точка первого вида) совпадала с точкой E_3, точка P_0^2 (абсолютная точка второго вида) имела координаты $P_0^2(1:1:1:0)$. Прямые P_1^1 и P_1^2 будут заданы соответственно уравнениями $x_0 = x_1 = 0$ и $x_0 = x_1 = x_2$.

Легко проверить, что группа проективных автоморфизмов пространства F_3^2 при таком задании абсолюта будет изоморфна группе матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $a^2 - b^2 = \pm 1$; $a_0 + a_1 + a_2 = a + b$; $b_0 + b_1 + b_2 = 0$.

Проективные автоморфизмы пространства F_3^2 будем называть движениями пространства F_3^2. Из (1) следует, что деривационные формулы и уравнения структуры группы G движений пространства F_3^2 имеют следующий вид:

$$dE_i = \omega_i^j E_j;\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j;\ i,\ j,\ k = \overline{0,3},$$

где дифференциальные формы ω_i^j удовлетворяют условиям:

$$\omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0,\ \omega_1^0 = \omega_0^1,\ \omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_0^1,\ \omega_0^3 + \omega_1^3 = -\omega_2^3. \qquad (2)$$

Комплекс прямых – трехмерное подмногообразие четырехмерного многообразия всех прямых пространства F_3^2 – будем изучать методом подвижного репера. Включая элемент комплекса (его прямую u) в репер, то есть полагая, что вершины E_0, E_1 подвижного репера принадлежат прямой u, выделим его главные дифференциальные формы ω_0^2, ω_0^3, ω_1^2, ω_1^3, обращающиеся в ноль при неподвижной прямой u.

Так как комплекс – трехмерное многообразие, то главные формы удовлетворяют одному линейному уравнению (уравнению комплекса):

$$q_\alpha \omega_0^\alpha + q_\alpha^1 \omega_1^\alpha = 0;\ \alpha = 2,3, \qquad (3)$$

где q_α, q_α^1 – функции перемещения прямой комплекса. За счет выбора подвижного репера, связанного с прямой комплекса, уравнение (3) в репере первого порядка можно упростить.

1. Комплексы ненулевой кривизны

Теорема 1. Если в уравнении (3) $q_\alpha \cdot q_\beta^1 \neq 0$ при $\beta \neq \alpha$, то уравнение комплекса (3) можно привести к одному из видов:

$$\omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta \pm \omega_0^\beta \text{ или } \omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta .$$

Доказательство. Так как $q_\alpha \neq 0$, то уравнение (3) можно записать в виде

$$\omega_0^\alpha = K\omega_1^\beta + K_1\omega_0^\beta + K_2\omega_1^\alpha ,\ \beta,\ \alpha = 2,3 ,\ \beta \neq \alpha .$$

При $\alpha = 2$ получим уравнение

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + K_1\omega_0^3 + K_2\omega_1^2 . \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (4) с учетом соотношений (2), получим квадратичное уравнение

$$\begin{aligned}&\left[dK_2 + \left(K_2^2 - 1\right)\omega_0^1 + \left(K + K_1K_2\right)\left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right)\right]\wedge \omega_1^2 + \left[dK_1 + \left(K + K_1K_2\right)\omega_0^1 + K_1\left(\omega_2^2 - \right.\right.\\ &\left.\left. - \omega_3^3 + K_1\omega_1^3\right)\wedge \omega_0^3 + \left[dK + \left(K_2K + K_1\right)\omega_0^1 + K\left(\omega_2^2 - \omega_3^3 + K_1\omega_0^3\right)\right]\wedge \omega_1^3 = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Применяя лемму Картана, получим относительно дифференциальных форм ω_0^1 и $\omega_2^2 - \omega_3^3$ и дифференциалов dK_1, dK_2, dK систему уравнений:

$$\begin{aligned}&dK_2 + \left(K_2^2 - 1\right)\omega_0^1 = q_{11}\omega_1^2 + \left(q_{12} - K - K_1K_2\right)\omega_0^3 + \left(q_{13} - K - K_1K_2\right)\omega_1^3,\\ &dK_1 + \left(K + K_1K_2\right)\omega_0^1 + K_1\left(\omega_2^2 - \omega_3^3\right) = q_{12}\omega_1^2 + q_{22}\omega_0^3 + \left(q_{23} - \left(K_1\right)^2\right)\omega_1^3,\\ &dK + \left(KK_2 + K_1\right)\omega_0^1 + K\left(\omega_2^2 - \omega_3^3\right) = q_{13}\omega_1^2 + \left(q_{23} - KK_1\right)\omega_0^3 + q_{33}\omega_1^3.\end{aligned} \tag{5´}$$

При неподвижной прямой комплекса главные формы обращаются в нуль, поэтому с учетом условий (2) в репере I порядка, получим систему трех уравнений относительно двух независимых дифференциальных форм Π_1^0, Π_3^3 и трех дифференциалов функций dK, dK_1, dK_2:

$$\begin{aligned}&dK_2 + \left[-1 + \left(K_2\right)^2\right]\Pi_0^1 = 0,\\ &K_1\left(\Pi_3^3 - \Pi_0^1\right) - \left(K_1K_2 + K\right)\Pi_0^1 - dK_1 = 0,\\ &K\Pi_3^3 - K\Pi_0^1 - \left(K_1 + K\cdot K_2\right)\Pi_0^1 - dK = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

где Π_i^j – дифференциальные формы ω_i^j при неподвижной прямой комплекса, $\Pi_2^2 = \Pi_0'$.

Полагая $K_2 = 0$ (при $K_2 \neq const$), из первого уравнения получим $\Pi_0^1 = 0$, из второго уравнения при $K_1 \neq 0$ получим $dK_1 = \Pi_3^3 = 0$, а из третьего уравнения

будем иметь $dK = 0$. Таким образом, имеем простейшее решение: $K_2 = 0$, $K_1 = \pm 1$, $\Pi_0^1 = \Pi_3^3 = 0$, $dK = 0$, при котором уравнение (4) принимает вид

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 \pm \omega_0^3 . \tag{7}$$

Система уравнений (6) при $K_1 \neq const$ имеет также частное решение: $K_1 = K_2 = 0$, $\Pi_0^1 = \Pi_3^3 = 0$. Уравнение (4) при этом принимает следующий вид:

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 . \tag{8}$$

Аналогичные результаты получим и при $\alpha = 3$.

Функцию K в уравнениях (7) и (8) будем называть так же, как и в классических неевклидовых пространствах, *кривизной комплекса*. При $K = const$ комплексы (7) и (8) будем называть *комплексами постоянной кривизны*.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. Для комплексов (7) и (8) репер I порядка является каноническим.

Действительно, при доказательстве теоремы 1 установлено, что в репере I порядка все дифференциальные формы $\Pi_i^j = 0$ и все формы ω_i^j становятся главными. Репер I порядка полностью определен, то есть является каноническим, K – инвариант I порядка комплексов (7) и (8).

Выясним геометрический смысл выбора канонических реперов комплексов (7) и (8). Рассмотрим нормальную корреляцию, которая порождается прямой u в проективном пространстве P_3. Через каждую точку M прямой u проходит конус прямых комплекса с вершиной в точке M. Касательная плоскость Π к этому конусу вдоль прямой u зависит от точки M. Соответствие между точками M прямой u и плоскостями Π, проходящими через прямую u, является инволюционным проективным отображением, называемым нормальной корреляцией. В классических неевклидовых 3-пространствах с прямой u комплекса связана полярная ей прямая u_1, которая пересекает плоскость Π в некоторой точке M_1. Таким образом, между точками прямых u и u_1 возникает инволюционное проективное соответствие, которое названо в работе [3] нормальной коллинеацией. В пространстве F_3^2 в репере I порядка роль прямой u_1 может выполнять любая из инвариантных прямых P_1^1 или P_1^2.

При неподвижной прямой u комплекса инвариантны две принадлежащие ей точки $E^0(1:1:0:0)$ и $E^1(1:-1:0:0)$, а также точка $E_2 = P_1^1 \cap E^0 P_0^2$.

Примем за вершину E_0 подвижного репера комплекса ту точку прямой u, которая в нормальной коллинеации соответствует точке E_2. Выясним, как изменится уравнение (4) за счет такого выбора. При неподвижной вершине E_0 кону-

са прямых комплекса имеем $dE_0 = 0$, из чего следует, что $\omega_0^i = 0$. Так как точка E_1 лежит в касательной плоскости Π к конусу прямых в точке E_0, а плоскость Π не содержит точку E_3, то $dE_1 = \omega_1^0 E_0 + \omega_1^2 E_2$, то есть $\omega_1^3 = 0$. Тогда из уравнения (4) следует, что $K_2\omega_1^2 = 0$, то есть $K_2 = 0$. За точку E_1 примем точку, сопряженную для E_0 на прямой u. Точке E_1 в нормальной коллинеации соответствует некоторая точка M прямой P_1^1. Если $M \equiv E_3$, то аналогично предыдущему при $dE_1 = 0$, $dE_0 = \omega_0^1 E_1 + \omega_0^3 E_3$, из уравнения (4) получим $K_1\omega_0^3 = 0$, то есть $K_1 = 0$. Если же $M \not\equiv E_3$, то точку M примем за точку $E^2(0:0:1:1)$.

Уравнения комплекса (4) во втором и первом случаях примут вид (7) и (8).

Рассматривая в нормальной коллинеации вместо прямой P_1^1 прямую P_1^2, мы получим тот же результат. Это следует из того, что касательная плоскость Π к конусу прямых комплекса с вершиной E_1 пересекает абсолютную плоскость P_2^1 по прямой E^0M, где $M \in P_1^1$, и совпадает с точкой E_3 или E^2. В первом случае прямая E^0M пересекает прямую P_1^2 в абсолютной точке $P_0^2(1:1:1:0)$, поэтому точке P_0^2 прямой P_1^2 соответствует точка E_0, а точке E_3 прямой P_1^1 соответствует точка E_1.

Определение. Точку $M_1(M_2)$ будем называть *абсолютной точкой* (абсолютной точкой второго вида) прямой u комплексов (7) и (8), если она соответствует точке P_0^1 (P_0^2) абсолюта в нормальной коллинеации, определяемой прямой P_1^1 (P_1^2).

На каждой прямой u комплексов (7) и (8) существуют две абсолютные точки. Для комплекса (8) вершины E_0 и E_1 подвижного репера совпадают с абсолютными точками M_1 и M_2. Из того, что вершины E_0 и E_1 сопряжены относительно абсолютной квадрики K_2, следует, что абсолютные точки M_1 и M_2 на каждой прямой комплекса (8) сопряжены.

Тем самым доказана следующая

Теорема 2. Комплекс (8) характеризуется тем, что абсолютные точки на каждой его прямой сопряжены относительно абсолютной квадрики K_2.

Назовем комплекс (8) *абсолютно-сопряженным*.

При $\alpha = 3$ уравнение (3) можно записать в следующем виде:

$$\omega_0^3 = K\omega_1^2 + K_1\omega_0^2 + K_2\omega_1^3. \qquad (4')$$

Помещая вершину E_0 подвижного репера в абсолютную точку M_1, аналогично предыдущему, приведем уравнение (4′) к виду

$$\omega_0^3 = K\omega_1^2. \qquad (9)$$

или к виду

$$\omega_0^3 = K\omega_1^2 \pm \omega_0^2 . \qquad (9')$$

Комплекс (9) является абсолютно-сопряженным.

Комплексы (7) и (9′) отличаются тем, что для них вершина E_0 подвижного репера является абсолютной точкой или абсолютной точкой второго вида.

Меняя индексы 0 и 1 в уравнениях комплексов (7) и (9′), получим комплексы

$$\omega_1^2 = K\omega_0^1 + \omega_0^3 , \qquad (7')$$

$$\omega_1^3 = K\omega_0^2 + \omega_1^2 , \qquad (7'')$$

произвол существования которых также равен одной функции от трех переменных.

Таким образом, получили для комплексов общего вида четыре уравнения, которые отличаются лишь тем, что одна из вершин E_0 или E_1 их подвижного репера совпадает с абсолютной точкой или абсолютной точкой второго вида.

Аналогично получим четыре вида уравнений для абсолютно-сопряженных комплексов.

Теорема 3. Произвол существования комплексов (7) при $K \neq const$ равен одной функции от трех переменных, а при $K = const$ – одной функции от двух переменных; произвол существования комплексов (8) равен одной функции от двух переменных.

Доказательство. Покажем выполнимость критерия Картана. Рассмотрим уравнения (5) и (5′) при $K_1 = 1$, $K_2 = 0$. Получим одно квадратичное уравнение и систему трех независимых линейных уравнений, поэтому $S_1 = 1$, $q = 3$, а из того, что $S_1 \geq S_2 \geq S_3$, следует $S_1 = S_2 = S_3 = 1$, то есть $Q = 6$. Число N также равно 6, так как система уравнений (5′) содержит 6 независимых коэффициентов. Критерий Картана выполняется. Произвол существования комплексов общего вида равен 1 функции от трех аргументов.

При $K = const$ $dK = 0$ и с учетом условий $K_1 = 1$, $K_2 = 0$ получим, что левая часть системы (5′) линейно зависима, а именно третье уравнение получим, если сложим первое уравнение, умноженное на $K^2 - 1$, со вторым, умноженным на K. Поэтому $q = 2$, $S_1 = S_2 = 1$, $S_3 = 0$, $Q = 3$. Число N также равно 3, так как 6 независимых коэффициентов уравнений (5′) связаны тремя условиями. Отсюда следует, что комплексы (7) постоянной кривизны зависят от одной функции двух переменных.

Для комплексов (8) ($K_2 = K_1 = 0$) первые два уравнения системы (5′) принимают следующий вид:

$$\omega_0^1 = q_{11}\omega_1^2 + (q_{12} - K)\omega_0^3 + (q_{13} - K)\omega_1^3,$$
$$K\omega_0^1 = q_{12}\omega_1^2 + q_{22}\omega_0^3 + q_{33}\omega_1^3.$$

Отсюда следует, что эти уравнения линейно зависимы, а коэффициенты q_{ij} удовлетворяют трем условиям: $Kq_{11} + q_{12} = 0$, $K(q_{12} - K) + q_{22} = 0$, $K(q_{13} - K) + q_{33} = 0$.

Поэтому для комплексов (8) $N = Q = 3$ критерий Картана выполняется, комплексы существуют с произволом в 1 функцию от двух переменных. Для комплексов (8) постоянной кривизны получим тот же результат.

При доказательстве теоремы 3 мы исключили случай, когда коэффициент K_2 в репере нулевого порядка является постоянным.

При $K_2 = const$ уравнение комплекса (4) запишем в следующем виде:

$$\omega_1^3 = q\omega_0^2 + q_1\omega_1^2 + q_2\omega_0^3. \qquad (10)$$

Уравнение (10) получается из уравнения (3) перенумерованием индексов 0 и 1, то есть комплекс (10) получается из комплекса (3) заменой вершин $E_0 \leftrightarrow E_1$ в подвижном репере комплекса. Поэтому аналогично предыдущему уравнение (10) можно привести к одному из видов: $\omega_1^3 = q\omega_0^2 \pm \omega_1^2$ или $\omega_1^3 = q\omega_0^2$, то есть получим комплексы того же вида в другом репере.

В том случае, когда в репере нулевого порядка в уравнении комплекса (3) оба коэффициента K_1 и K_2 постоянны, то есть $dK_1 = dK_2 = 0$, из уравнений (6) получим (при $K_2^2 \neq 1$) $dK = 0$, $K_1 = 1$, $\Pi_0^1 = \Pi_3^3 = 0$, то есть существует канонический репер I порядка. Уравнение (4) в каноническом репере принимает следующий вид:

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 + \omega_0^3 + K_2\omega_1^2, \qquad (11)$$

K_2 – инвариант нулевого порядка.

Произвол существования комплекса (11) при $K \neq const$ и $K_2^2 \neq 1$ – одна функция от трех переменных, а при $K = const$ – одна функция от двух переменных, то есть тот же, что и для комплексов (7).

Выясним строение комплекса (11) и геометрический смысл выбора его канонического репера.

В нормальной коллинеации, связанной с прямой комплекса (11), вершинам E_2 и E_3 соответствуют точки $M_2(1 : -K_2 : 0 : 0)$, $M_3(1 : K : 0 : 0)$, а так как $K_2 = const$, то на каждой прямой комплекса (11) имеется абсолютная инвариантная точка M_2, а при $K = const$ – две абсолютные инвариантные точки M_2 и M_3.

Комплекс (11) при $K \neq const$ назовем *абсолютно-инвариантным комплексом,* а при $K = const$ *абсолютно-инвариантным комплексом постоянной кривизны*.

С каждой прямой комплекса (11) связано число $(E_0 E_1 M_2 M_3) = K_2/K$, характеризующее отклонение абсолютных точек от вершин E_0 и E_1 канонического репера. Число K_2/K назовем *второй кривизной* комплекса (11).

При неподвижной прямой из уравнений (6) следует, что для комплекса (11) существует репер I порядка.

Рассмотрим комплекс (11) при $K_2^2 = 1$. В этом случае первое уравнение системы (5') обращается в тождественный нуль ввиду линейной независимости главных форм, поэтому $q_{11} = 0$, $q_{12} = K \pm 1$.

Отсюда следует, что $q = 2$, $N = Q = 3$. Критерий Картана выполняется, комплекс существует и зависит от 1 функции двух переменных.

Уравнение комплекса принимает следующий вид:

$$\omega_0^2 = K\omega_1^3 \pm \omega_1^2 \pm \omega_0^3 . \qquad (12)$$

Для комплексов (12) также существует репер I порядка при любом $K^2 \neq 1$.

Выясним строение комплекса (12). В нормальной коллинеации при $K = -1$ точка E_2 соответствует точке $E^0(1:1:0:0)$, которая описывает поверхность (абсолютную плоскость P_1^2). Отсюда следует, что касательная плоскость к конусу прямых комплекса с вершиной в точке E^0 проходит через точку $E_2(0:0:1:0)$, а так как она проходит и через точку E^0, то все касательные плоскости к конусу в точке E^0 проходят через инвариантную точку $P_0^2(1:1:1:0)$ (неподвижную точку абсолюта), то есть конус вырождается в пучок прямых. Комплекс (12) расслаивается (согласно [4, С. 120]) в двухпараметрическое множество пучков прямых с центрами в точках плоскости P_2^1.

При $K_2 = 1$ точке E_2 соответствует точка $E^1(1:-1:0:0)$. Касательная плоскость к конусу с вершиной в точке E^1 содержит прямую E^1E^0 и точку E_2 и, следовательно, проходит через точку P_0^2. Имеем комплекс того же вида, центры пучков которого принадлежат плоскости P_2^2 абсолюта. В соответствии с [4, С. 120] комплексы (12) назовем *особыми квазиспециальными комплексами*.

Частным видом комплексов (12) являются комплексы кривизны $K^2 = 1$.

В этом случае комплекс (12) принимает следующий вид:

$$\omega_0^2 = \pm\omega_1^3 \pm \omega_0^3 \pm \omega_1^2 . \qquad (13)$$

Рассмотрим все возможные виды комплексов (4), для которых $K^2 = K_1^2 = K_2^2 = 1$.

Теорема 4. Для комплексов (3) при всех q_α и q'_α постоянных, не равных нулю, существует канонический репер тогда и только тогда, когда произведения $q_0^2 \cdot q_1^2$ и $q_0^3 \cdot q_1^3$ имеют разные знаки.

Доказательство. Учитывая, что все коэффициенты в уравнении (3) отличны от нуля, мы можем записать уравнение комплекса в виде (4), где K, K_1, K_2 – $const$, при этом в каноническом репере, который является репером I порядка, уравнение (4) имеет вид (12) при $K = const$, не равном нулю. В том случае, когда $K = \pm 1$, уравнение комплекса (4) принимает вид (13).

Рассмотрим комплексы, для которых выполняется условие теоремы

а) $K = K_1 = K_2 = 1$, $\omega_0^2 = \omega_1^3 + \omega_1^2 + \omega_0^3$. (14)

Система (5´) принимает вид:

$$\begin{aligned} 2\omega_0^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 &= q_{12}\omega_1^2 + q_{22}\omega_0^3 + (q_{23} - 1)\omega_1^3, \\ 2\omega_0^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 &= q_{13}\omega_1^2 + (q_{23} - 1)\omega_0^3 + q_{33}\omega_1^3, \end{aligned} \qquad (14')$$

где $q_{12} = q_{13} = 2$.

Из линейной зависимости системы (14´) следует, что $q_{22} = q_{23} - 1 = q_{33}$, то есть имеем одно линейное уравнение, зависящее от одной функции $q = q_{23}$. Учитывая (2) и уравнение комплекса (14), получим

$$3\omega_0^1 - \omega_3^3 = q\left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right) + 4\omega_1^2, \qquad (15)$$

а при неподвижной прямой $3\Pi_0^1 - \Pi_3^3 = 0$.

Отсюда следует, что дифференциальные формы ω_0^1 и ω_3^3 в репере I порядка не становятся главными, канонический репер I порядка не существует.

Продолжая уравнение (15) и учитывая (2) и (14), получим квадратичное уравнение

$$\left[dq + (q+4)\omega_0^1 - q\omega_3^3 + (4-q)\omega_1^2\right] \wedge \left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right). \qquad (16)$$

Применяя лемму Картана, при неподвижной прямой имеем

$$dq + (q+4)\Pi_0^1 - q\Pi_3^3 = 0.$$

Учитывая, что из (15) $\Pi_3^3 = 3\Pi_0^1$, получим

$$dq + (4 - 2q)\Pi_0^1 = 0 . \qquad (16')$$

При $q \neq 2$ уравнение (16′) имеет простейшее решение $dq = 0$, $\Pi_0^1 = 0$, а значит и $\Pi_3^3 = 0$. Репер II порядка для комплекса (14) при $q \neq 2$ является каноническим. Комплекс (14) существует с произволом в 1 функцию от одного аргумента, так как для него $N = Q = 1$ и критерий Картана выполняется.

Заметим, что при $dq = 0$ $q = 2$ и уравнение (16) после подстановки в него выражения $\omega_3^3 = 3\omega_0^0 - 4\omega_1^2 - 2(\omega_0^3 + \omega_1^3)$ из (15) принимает вид

$$2\omega_1^2 \wedge (\omega_0^3 + \omega_1^3) = 0 ,$$

то есть устанавливается связь между главными формами. Комплекс (14) в этом случае не существует.

Аналогичный результат получим для других комплексов, удовлетворяющих условию теоремы:

б) $\omega_0^2 = \omega_1^3 - \omega_1^2 - \omega_0^3$,

в) $\omega_0^2 = -\omega_1^3 - \omega_1^2 + \omega_0^3$,

г) $\omega_0^2 = -\omega_1^3 + \omega_1^2 - \omega_0^3$.

Для всех этих комплексов система уравнений (5′) состоит из двух зависимых уравнений и для них существует канонический репер II порядка. Произвол существования этих комплексов – одна функция от одного аргумента.

На каждой прямой комплексов а) – г) абсолютные точки совпадают с точками E^0 и E^1, которые описывают поверхности (абсолютные плоскости), поэтому они являются одновременно квазиспециальными и абсолютно-инвариантными. Назовем эти комплексы *абсолютно-квазиспециальными*.

Рассмотрим такие комплексы (13), для которых условие теоремы 4 не выполняется. Для всех этих комплексов $K,\ K_1,\ K_2 < 0$, и поэтому система уравнений (5′) не зависит от дифференциальной формы ω_1^2 и канонический репер для них не существует.

Рассмотрим, например, комплекс вида

а′) $\omega_0^2 = -\omega_1^3 - \omega_1^2 - \omega_0^3$. (17)

В системе (5′) для комплекса (17) $q_{11} = q_{12} = q_{13} = 0$, $q_{23} = q_{22} = q_{33}$, и поэтому она состоит из одного уравнения

$$\omega_2^2 - \omega_3^3 = q_{33}(\omega_0^3 - \omega_1^3),$$

или, учитывая (2), получим

$$\omega_0^1 - \omega_3^3 = q\left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right). \qquad (18)$$

При неподвижной прямой получим решение $\Pi_0^1 = \Pi_3^3$, формы ω_0^1 и ω_3^3 через главные формы не выражаются, репер I порядка не является каноническим.

Продолжая уравнение (18) и применяя лемму Картана, получим при неподвижной прямой такое же уравнение. Методом полной математической индукции докажем, что канонический репер для комплекса (18) не существует.

Аналогичный результат получим для комплексов б′) $\omega_0^2 = \omega_1^3 - \omega_1^2 + \omega_0^3$, в′) $\omega_0^2 = \omega_1^3 + \omega_1^2 - \omega_0^3$, г′) $\omega_0^2 = -\omega_1^3 + \omega_1^2 + \omega_0^3$.

Комплексы а′) – г′) состоят из связок прямых с центрами, принадлежащими линиям, которые описывает точка E^0 или точка E^1 в абсолютных плоскостях P_2^1 и P_2^2. Касательные к этим линиям пересекают абсолютную прямую P_1^1 в точке $E^2(0:0:1:1)$ или в точке $E^3(0:0:1:-1)$. Такие комплексы назовем *вырожденными комплексами*.

Доказана следующая теорема.

Теорема 5. В бифлаговом пространстве F_3^2 существуют 6 типов комплексов прямых ненулевой кривизны:

1) комплексы общего вида,
2) абсолютно сопряженные комплексы,
3) особые квазиспециальные комплексы,
4) абсолютно инвариантные комплексы,
5) абсолютно-квазиспециальные комплексы,
6) вырожденные комплексы.

Для каждого из первых четырех типов комплексов существует канонический репер I порядка, для комплекса 5 существует репер II порядка, а для вырожденных комплексов канонический репер не существует.

2. Специальные и вырожденные специальные комплексы

Рассмотрим комплексы, для которых $q_\alpha \cdot q_\beta^1 = 0$ при $\alpha,\ \beta = 2,3,\ \alpha \neq \beta$.

а) При $q_2 \neq 0$ уравнение (3) при указанном условии можно записать в виде

$$\omega_0^2 = k\omega_0^3 \qquad (19)$$

или в виде

$$\omega_0^2 = k\omega_1^2 . \qquad (20)$$

Чистое замыкание уравнения (19) имеет вид

$$\left(\omega_0^1 - k\omega_0^3\right)\wedge\omega_1^2 + \left[k\left(k\omega_1^3 - \omega_0^1 - \omega_3^3\right) - dk\right]\wedge\omega_0^3 - k\omega_0^1\wedge\omega_1^3 = 0 .$$

Применяя лемму Картана и учитывая (19), при неподвижной прямой получим

$$\Pi_0^1 = 0 ;\ k\left(\Pi_0^1 - \Pi_3^3\right) + dk = 0 .$$

Простейшим решением этой системы является

$$\Pi_0^1 = 0, \Pi_3^3 = 0 ,$$

откуда следует, что репер I порядка является каноническим, а уравнение комплекса (19) приводится к виду

$$\omega_0^2 = \pm\omega_0^3 . \tag{21}$$

Комплекс (21) является *специальным*, вершина E_0 подвижного репера описывает поверхность f, касательная плоскость которой в точке E_0 задается уравнением (21) и пересекает инвариантную прямую P_1^1 в точке $E^2(0:0:1:1)$ или в точке $E^3(0:0:1:-1)$.

Выбор канонического репера заключается в следующем. Вершина E_0 находится как точка касания прямой u комплекса поверхности f; вершина E_1 сопряжена для точки E_0 на прямой u.

Единичная точка находится как точка пересечения прямой E^0E^2 с инвариантной прямой P_1^2.

Существование комплекса (21) следует из существования поверхности f, произвол существования которой – одна функция двух переменных.

Внешнее дифференцирование уравнения (20) дает

$$\left[\left(1 - k_1^2\right)\omega_0^1 - dk_1\right]\wedge\omega_1^2 = 0 . \tag{22}$$

По лемме Картана получим

$$\left(1 - k_1^2\right)\omega_0^1 - dk_1 = l\omega_1^2 . \tag{23}$$

При неподвижной прямой имеем

$$\left(1-k^2\right)\Pi_0^1 - dk = 0 .$$

При $k^2 \neq 1$ простейшим решением этого уравнения является

$$\Pi_0^1 = 0, k = 0 ,$$

откуда следует, что ω_0^1 становится главной формой, а ω_3^3 не является главной формой.

Репер I порядка не является каноническим.

Уравнение комплекса (20) принимает вид

$$\omega_0^2 = 0 . \tag{24}$$

Продолжая уравнение (24), с помощью метода полной математической индукции убеждаемся в том, что канонический репер для комплекса (24) не существует.

Вершина E_0 комплекса (24) описывает поверхность f, касательные плоскости к которой проходят через инвариантную точку первого вида (E_3), то есть f является тангенциально-вырожденной поверхностью (конической поверхностью). Назовем комплекс (24) *тангенциально-вырожденным специальным комплексом* первого рода.

Из (22) и (23) следует, что комплекс (24) существует с произволом в одну функцию одного аргумента, что соответствует произволу существования конической поверхности в P_3.

При $k^2 = 1$ уравнение комплекса (20) принимает вид

$$\omega_0^2 = \pm\omega_1^2 . \tag{25}$$

Комплексы (25) состоят из связок прямых с центрами на кривых, которые описывают точки E^0 и E^1 в инвариантных плоскостях, при этом касательные к этим кривым проходят через точку E_2. Такой комплекс назовем *вырожденным специальным комплексом*.

При $q_2 = 0$ уравнение (3) имеет один из видов:

$$\omega_0^3 = k\omega_1^3 \tag{26}$$

или

$$\omega_1^2 = k_1\omega_1^3 . \tag{27}$$

Внешнее дифференцирование и применение леммы Картана к уравнению (26) дает

$$\omega_1^0\left(1-k^2\right)-k\omega_1^2+\left(k-1\right)\ \omega_0^2+dk-q\omega_1^3=0\,. \qquad (28)$$

При неподвижной прямой получим

$$\left(1-k^2\right)\ \Pi_1^0+dk=0\,.$$

Простейшим решением при $k^2\neq 1$ является $k=0,\Pi_1^0=0$.

Репер I порядка для комплекса (26) не существует.

Продолжая уравнение (28) при $k=0$, получим

$$\left(\omega_0^1-\omega_0^2\right)\wedge\omega_1^2-\omega_0^1\wedge\omega_0^2+\left(dq-q\omega_1^2-q\omega_3^3\right)\wedge\omega_1^3=0\,.$$

Применяя лемму Картана, при неподвижной прямой получим при $q\neq 0$ простейшее решение

$$\Pi_0^1=\Pi_3^3=0,q=1\,.$$

Отсюда следует, что для комплекса (26) существует канонический репер II порядка и при $k^2\neq 1$ его можно привести к виду

$$\omega_0^3=0\,. \qquad (29)$$

Комплекс (29) имеет следующее строение: вершина E_0 прямой комплекса описывает некоторую поверхность f, касательная плоскость к которой в точке E_0 пересекает абсолютную прямую P_1^1 в точке E_2, а прямую P_1^2 – в абсолютной точке P_0^2, поэтому поверхность f является тангенциально-вырожденной. Комплекс (29) назовем *тангенциально-вырожденным специальным* комплексом второго рода.

Комплекс (27) получается из комплекса (19) заменой точки E_0 на E_1, поэтому он имеет то же строение, что и комплекс (19), то есть для него при $k_1\neq 0$ существует канонический репер I порядка и его можно привести к виду

$$\omega_1^2=\pm\omega_1^3\,. \qquad (30)$$

Вершина E_1 описывает поверхность f, касательная плоскость которой в точке E_1 пересекает абсолютную прямую P_1^1 в точке E^2 или E^3. Комплекс (30) является специальным, и его произвол существования – одна функция от двух аргументов.

При $k=0$ комплекс (27) имеет вид

$$\omega_1^2 = 0. \qquad (31)$$

Комплекс (31) так же, как и комплекс (24), является тангенциально-вырожденным специальным комплексом первого рода. Канонический репер этого комплекса так же, как и комплекса (24), не существует.

Рассмотрим комплексы (26) при $k^2 = 1$. Они имеют вид

$$\omega_0^3 \pm \omega_1^3 = 0. \qquad (32)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (32), получим связь на главные формы – $\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) \wedge \left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right) = 0$.

Это означает, что комплексы (32) не существуют.

Заменяя в комплексе (29) индекс 0 на 1, получим комплекс вида

$$\omega_1^3 = 0. \qquad (33)$$

Комплекс (33) отличается от комплекса (29) тем, что вершина E_1 описывает поверхность f. Поэтому для комплексов (33) так же, как и для комплексов (29), существует репер II порядка, а произвол существования комплексов (33) – функция одного аргумента.

Комплексы (33) будем называть, как и комплексы (29), тангенциально-вырожденными специальными комплексами второго рода.

Во всех случаях получили комплексы, обе кривизны которых равны нулю. Поэтому рассмотренные комплексы называют также комплексами нулевой кривизны.

Таким образом, нами доказана.

Теорема 5. Существуют четыре типа комплексов нулевой кривизны: специальные комплексы, тангенциально-вырожденные специальные комплексы первого и второго родов, вырожденные комплексы. При этом для специальных комплексов существует канонический репер I порядка, а для тангенциально-вырожденных специальных комплексов второго рода существует репер II порядка, для двух других типов специальных комплексов канонический репер не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киотина, Г.В. Группа движений обобщенно-галилеева пространства [Текст] // Вестник Рязанского государственного педагогического университета. – Рязань, 2004. – С. 117–126.

2. Киотина, Г.В. Комплексы прямых в бифлаговом пространстве $\overline{F}_3^2$ [Текст] // Труды вторых Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2004. – С. 338–344.

3. Киотина, Г.В. Классификация комплексов прямых в репере нулевого порядка в пространстве $\overline{F}_3^2$ [Текст] // Известия Саратовского университета. Новая серия. – 2011. – Т. 11. – Вып. 3. – Ч. 2. – С. 11–15.

4. Кованцов, Н.И. Теория комплексов [Текст]. – Киев : Изд-во КГУ, 1963. – 292 с.
5. Розенфельд, Б.А. Гиперкомплексы прямых в евклидовых и неевклидовых пространствах [Текст] / Б.А. Розенфельд, О.В. Зацепина, П.Г. Стеганцева // Известия вузов. Математика. – Казань, 1990. – № 3. – С. 57–66.

G.V. Kiotina

COMPLEXES OF LINES IN BIFLAG SPACE F_3^2

Complexes of lines in hyperbolic type of one of biflag spaces introduced by the author are studied by the method of external Cartan forms. We prove that six non-special variants of complexes and fore variants of special complexes exist in mentioned space in zero order neighborhood. For every complex a first-order moving flag or a second-order moving flag were drawn.

absolute, automorphism, group, frame: moving, canonical; measurement invariant differentiation external, neighborhood, space biflag.