УДК 514

О.В. Зацепина

КЛАССИФИКАЦИЯ ГИПЕРКОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В $^1S_5$ В РЕПЕРЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Многообразие прямых в *n*-мерном пространстве зависит от 2*n* – 2 параметров. Одно дополнительное условие на плюккеровы координаты задает 2*n* – 3 параметрическое множество прямых, которое в *n*-мерном пространстве называется гиперкомплексами прямых, а в 3-мерном – комплексами прямых. Несмотря на то, что в настоящее время комплексы прямых в неевклидовых пространствах и гиперкомплексы прямых либо совсем не изучены, либо изучены мало (в зависимости от вида пространства), начали появляться работы по теории комплексов в пространствах с обобщенной проективной метрикой [3–5]. В данной работе изучаются гиперкомплексы прямых в 5-мерном пространстве Лобачевского. Изучение гиперкомплексов ведется методом внешних форм Картана. Задается репер в окрестности первого порядка гиперкомплекса прямых и выясняется геометрический смысл его выбора. В пространстве $^1S_5$ выделяются и отдельно рассматриваются собственные и идеальные гиперкомплексы общего вида, собственные и идеальные гиперком- … специальные гиперкомплексы, вырожденные специальные гиперкомплексы.

гиперкомплексы прямых 5-мерного пространства Лобачевского, линейные дифференциальные формы, метод внешних форм Картана, окрестность первого порядка.

Гиперкомплексом прямых в 5-мерном пространстве Лобачевского $^1S_5$ называется многообразие прямых, зависящее от 7 параметров. В данной работе проводится классификация гиперкомплексов в $^1S_5$ в окрестности первого порядка. При этом под точками пространства $^1S_5$ понимаются векторы $\vec{x}$ мнимой длины псевдоевклидова 6-мерного пространства $^1E_6$. Точки автополярного репера пространства $^1S_5$ представляются векторами ортонормированного репера пространства $^1E_6$, причем $\vec{l}_0^{\,2} = -1$, $\vec{l}_\alpha^{\,2} = 1$, $\alpha = \overline{1,5}$.

Деривационные формулы и уравнения структуры пространства $^1S_5$ имеют вид:

$$d\vec{l}_i = \omega_i^j \vec{l}_j,$$
$$\omega_i^i = 0, \quad \omega_0^\alpha = \omega_\alpha^0, \quad \omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha, \tag{1}$$
$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j ; D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j ; \quad i, j = \overline{0,5}, \, \alpha, \beta = \overline{1,5}.$$

Включение элемента гиперкомплекса в репер означает такой выбор подвижного репера $\vec{l}_i$, при котором две его вершины $(E_0 E_1)$ расположены на прямой гиперкомплекса. Тем самым выделяются главные линейные формы ω_0^α, ω_1^α, удовлетворяющие одному линейному уравнению

$$\bar{k}_\alpha \, \omega_0^\alpha + \bar{k}_\alpha^1 \, \omega_1^\alpha = 0 \, , \; \alpha = \overline{2,5} \, . \tag{2}$$

1. Комплексы общего вида

Теорема 1. Если в уравнении (2) $\bar{k}_\alpha \cdot \bar{k}_\beta^1 \neq 0$ при $\beta \neq \alpha$, $\alpha, \beta = \overline{2,5}$, то уравнение гиперкомплекса прямых в репере первого порядка можно привести к виду

$$\omega_0^\alpha = k \, \omega_1^\beta, \text{ где } k \neq 0 \, . \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\bar{k}_2 \cdot \bar{k}_3^i \neq 0$. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$\omega_0^2 = k_i \, \omega_0^i + k_j^1 \, \omega_1^j \, , \; i = \overline{3,5} \, , \; j = \overline{2,5} \, . \tag{4}$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (4), используя его и применяя лемму Картана, при неподвижной прямой получим систему из семи уравнений относительно дифференциалов dk_i, dk_j^1 и семи вторичных дифференциальных форм π_i^j (π_i^j обозначает форму ω_i^j при неподвижной прямой комплекса).

При $k_3 \neq 0$ за счет выбора вторичных параметров можно все остальные коэффициенты уравнения (4) привести к нулям и тогда получим: $\pi_2^4 = \pi_3^4 = \pi_2^5 = \pi_3^5 = \pi_2^3 = \; = \pi_0^1 = 0$, $d\, k_3 = 0$ ($k_3 = \overset{1}{\kappa}_3$).

Уравнение гиперкомплекса прямых принимает вид

$$\omega_0^2 = k \, \omega_1^3 \; (\omega_0^2 = k \, \omega_0^4 \, , \; \omega_0^2 = k \, \omega_1^5), \tag{5}$$

где k – инвариант окрестности второго порядка называемый кривизной гиперкомплекса. Аналогичный результат получим при α = 3, 4, 5.

Продолжая уравнение (5) и применяя лемму Картана, получим

$$\begin{array}{ll} \omega_0^1 + k\,\omega_2^3 = k_s^1\,\omega^s & -k\,\omega_3^4 = k_s^5\,\omega^s \\ \omega_2^3 - k\omega_0^1 = k_s^2\,\omega^s & \omega_2^5 = k_s^6\,\omega^s \\ -dk = k_s^3\,\omega^3 & -k\,\omega_3^5 = k_s^7\,\omega^s \\ \omega_2^4 = k_s^4\,\omega^s & s = \overline{1,7} \quad \omega^s - \textit{главныеформы.} \end{array} \tag{5′}$$

Отсюда следует, что дифференциальные формы ω_0^1, ω_2^3, ω_2^4, ω_2^5, ω_3^4, ω_3^5 перемещения гиперкомплекса становятся главными, а форма ω_4^5 главной не является.

Репер первого порядка для гиперкомплекса (5) не является каноническим, он зависит от одного параметра. Заметим, что в пространстве ${}^1S_4$ для гиперкомплекса вида (5) существует канонический репер первого порядка [2].

Геометрический смысл выбора репера комплекса (5) состоит в следующем. В работах [1, 6] показано, что с каждой прямой u гиперкомплекса прямых пространства P_n связана проходящая через неё $(n-2)$ плоскость Π_{n-2}, являющаяся пересечением гиперплоскостей, касающихся гиперконусов, состоящих из прямых гиперкомплекса с вершинами в точках этой прямой. При $n = 5$ будем иметь трехмерную плоскость Π_3, проходящую через прямую u и прямую u_1, полярную для Π_3 относительно абсолютной квадрики. Через каждую точку M_0 прямой u проходит гиперконус прямых гиперкомплекса (5).

Касательная плоскость к этому конусу вдоль прямой u пересекает прямую u_1 в точке M_1. Инволюционное соответствие $f(M_0) = M_1$ является проективным и названо так же, как в [6], ***нормальной коллинеацией.***

На прямой u_1 возникают, таким образом, две инволюции: точке M_1 прямой u_1 соответствует точка N_1, полярная для точки M_1 на прямой u_1, и точка N', которая соответствует точке N в нормальной коллинеации, где N – полярная для точки M на прямой u. Если прямая u – собственная, то u_1 – несобственная, и инволюция попарно-сопряженных пар точек является эллиптической.

Поэтому на прямой u_1 всегда существует общая пара точек P_1, Q_1 рассмотренных инволюций. Им соответствуют в нормальной коллинеации точки P

и Q, которые названы, как в [6], центрами прямой гиперкомплекса, а точки P_1, Q_1 – коцентрами.

Если вершины E_0 и E_1 поместим в центры, а вершины E_2 и E_3 в коцентры, то уравнение гиперкомплекса примет вид

$$\omega_0^2 = k\,\omega_1^3. \tag{6}$$

Действительно, если точка E_0 неподвижна, то $dE_0 = 0$, то есть $\omega_0^i = 0$, $i = \overline{1,5}$, а $d\overrightarrow{E_1} = \omega_1^0 \overrightarrow{E_0} + \omega_1^2 \overrightarrow{E_2} + \omega_1^4 \overrightarrow{E_4} + \omega_1^5 \overrightarrow{E_5}$, т.е. $\omega_1^3 = 0$.

Касательная гиперплоскость к конусу прямых в точке E_0 пересекает прямую E_2E_3 в точке E_2. Значит точка E_3 ей не принадлежит. Из уравнения (4) получим, что $k_2^1 = k_4^1 = k_3^1 = 0$.

При неподвижной точке E_1 получим: $dE_1 = 0$, $\omega_1^0 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_1^5 = 0$, $dE_0 = \ = \omega_0^1 E_1 + \omega_0^3 E_3 + \omega_0^4 E_4 + \omega_0^5 E_5 = 0$, то есть $\omega_0^2 = 0$. Отсюда следует, что $k_3 = k_4 = k_5 = 0$.

Получим уравнение (6).

Если в центры поместим вершины E_0 и E_1, а в коцентры вершины E_α, E_β, то получим уравнение (3).

Разделив обе части уравнения (3) на k, получим

$$\omega_1^\beta = q\,\omega_0^\alpha\ , \tag{3´}$$

где $q = \dfrac{1}{k}.$

Геометрический смысл выбора канонического репера гиперкомплекса прямых (3´) состоит в том, что точки E_β, E_α являются центрами прямой гиперкомплекса, а точки E_0, E_1 – коцентрами. Прямая E_0E_1 гиперкомплекса принадлежит в этом случае идеальной области пространства ${}^1S_5$. ***Гиперкомплекс (3') назовем идеальным.***

Гиперкомплексы (3) и (3') ***будем называть гиперкомплексами общего вида***.

В том случае, когда в гиперкомплексах (3) и (3') $k = const$, то есть k является инвариантом нулевого порядка, гиперкомплексы (3) и (3') будем называть ***гиперкомплексами постоянной кривизны.*** В этом случае $dk = 0$ и система (5´) будет состоять из 6 уравнений, из которых следует, что репер первого порядка зависит от одного параметра так же, как и для комплексов общего вида.

2. Специальные комплексы

Рассмотрим случай, когда все $\bar{k}_\alpha \cdot \bar{k}^1_\beta = 0$ при $\beta \neq \alpha$.

Теорема 2. Если в уравнении (2) все произведения $\bar{k}_\alpha \cdot \bar{k}^1_\beta = 0$ при $\beta \neq \alpha$, то уравнение (2) в общем случае можно привести к одному из видов: $\omega^2_0 = 0$ или $\omega^2_1 = 0$, которые задают специальные гиперкомплексы. Реперы первого порядка этих гиперкомплексов зависят от трех параметров.

Доказательство. Пусть, например, в уравнении (2) $\bar{k}_2 \neq 0$. Тогда из условия теоремы следует, что $\bar{k}^1_3 = \bar{k}^1_4 = \bar{k}^1_5 = 0$ и уравнение (2) при $\bar{k}^1_2 \neq 0$ имеет вид

$$\omega^2_0 = k\,\omega^2_1, \tag{7}$$

а при $k^1_2 = 0$

$$\omega^2_0 = k_3\,\omega^3_0 + k_4\,\omega^4_0 + k_5\,\omega^5_0. \tag{7'}$$

Дифференцируя уравнение (7'), используя его и применяя лемму Картана, после фиксирования главных параметров, получим

$$\begin{aligned}
&\pi^1_0 = 0,\\
&dk_3 = \left(k_3^2 - 1\right)\pi^3_2 + k_3 k_4 \pi^4_2 + k_4 \pi^4_3 + k_3 k_5 \pi^5_2 + k_5 \pi^5_3,\\
&dk_4 = \left(k_4^2 - 1\right)\pi^4_2 + k_3 k_4 \pi^3_2 + k_2 \pi^4_3 + k_4 k_5 \pi^5_2 + k_5 \pi^5_4,\\
&dk_5 = -k_3 \pi^5_3 + k_4 k_5 \pi^4_2 + k_4 \pi^5_4 + \left(k_5^2 - 1\right)\pi^5_2.
\end{aligned} \tag{8}$$

Если в репере нулевого порядка $k_i \neq const$ ($i = \overline{3,5}$), то система (8) имеет простейшее решение

$$k_3 = k_4 = k_5 = 0,\ \pi^1_0 = \pi^3_2 = \pi^4_2 = \pi^5_2 = 0, \tag{8'}$$

при котором уравнение (2) принимает вид

$$\omega^2_0 = 0. \tag{9}$$

Из (8') следует, что вторичные дифференциальные формы ω_0^1, ω_3^2, ω_2^4, ω_2^5 становятся главными, а формы ω_3^4, ω_3^5, ω_4^5 главными не являются. Репер первого порядка не является каноническим, он зависит от трех параметров.

Гиперкомплекс является специальным, точка E_0 описывает поверхность V_4, а прямая E_0E_1 касается ее в точке E_0.

Заменяя точку E_2 точкой E_i, $i=\overline{3,5}$, получим другие уравнения специального гиперкомплекса: $\omega_0^3=0$, $\omega_0^4=0$, $\omega_0^5=0$.

Полагая в уравнении (2) $k_2^1\neq 0$, из условия теоремы получим, что уравнение гиперкомплекса при $k_2=0$ имеет вид $\omega_1^2=k_3^1\omega_1^3+k_4^1\omega_1^4+k_5^1\omega_1^5$, которое при $\left(k_i^1\right)^2\neq const$ ($i=\overline{3,5}$) за счет выбора вторичных параметров приводится к виду

$$\omega_1^2=0. \tag{9'}$$

Дифференцируя уравнение (9') имеем:

$$d\omega_1^2=\omega_0^1\wedge\omega_0^2+\omega_1^3\wedge\omega_3^2+\omega_1^4\wedge\omega_4^2+\omega_1^5\wedge\omega_5^2=0.$$

Применяя лемму Картана, получим, что формы ω_0^1, ω_2^3, ω_2^4, ω_2^5 становятся главными для комплекса (9'), а формы ω_3^4, ω_3^5, ω_4^5 главными не являются. Точка E_1 описывает поверхность V_1, а прямая E_0E_1 касается этой поверхности в точке E_1.

Так как точка E_1 принадлежит идеальной области пространства ${}^1S_5$, то и поверхность V_1 принадлежит идеальной области. Гиперкомплекс (9') назовем ***идеальным специальным гиперкомплексом*** прямых, полярно-сопряженным для гиперкомплекса (9). Аналогично получим специальные идеальные гиперкомплексы

$$\omega_1^3=0,\ \omega_1^4=0,\ \omega_1^5=0.$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (7) и применяя лемму Картана, после фиксирования главных параметров получим:

$$dk=\left(k^2-1\right)\pi_0^1=0,\ \pi_2^3=0,\ k\pi_2^3=0,\ \pi_2^4=0,\ k\pi_2^4=0,\ \pi_2^5=0,\ k\pi_2^5=0. \tag{10}$$

При $k^2\neq 1$ эта система имеет простейшее решение:

$$k=0\ ,\ \pi_0^1=\pi_2^3=\pi_2^4=\pi_2^5=0\,. \qquad (10')$$

Уравнение гиперкомплекса принимает вид (9).

Уравнение (9) является частным случаем уравнения (6) при $k=0$. Поэтому гиперкомплексы (9), а также гиперкомплексы (9') назовем гиперкомплексами нулевой кривизны.

Геометрический смысл выбора репера первого порядка гиперкомплекса (9) состоит в следующем. Прямая E_0E_1 гиперкомплекса касается поверхности V_4 в точке E_0, точка E_1 находится как полярно-сопряженная для точки E_0, а точка E_2 находится как сопряженная для касательной гиперплоскости P_4 к гиперповерхности V_4. Для прямой E_0E_1 в P_4 находится единственная 2 плоскость Π_2, в которой вершины E_3, E_4, E_5 образуют автополярный трехвершинник. Для его задания, как известно, требуются три параметра.

При $k=\pm 1$ уравнение (7) имеет вид

$$\omega_0^2=\pm\omega_1^2\,. \qquad (11)$$

Из (10) следует, что четыре дифференциальные формы ω_0^1, ω_3^4, ω_3^5, ω_4^5 не являются главными в репере первого порядка.

Выясним строение гиперкомплекса (11) при $k=1$. Так как $\omega_2^0=\omega_2^1$, то вершина E_2 репера описывает четырехмерную поверхность V_4, касательная плоскость которой в точке E_2 имеет уравнение $\omega_2^0-\omega_2^1=0$.

Так как $d(E_0+E_1)=-\omega_0^1(E_0+E_1)+(\omega_0^i+\omega_1^i)E_i$, $dE_2=\omega_2^0(E_0+E_1)+\omega_2^iE_i$, $i=\overline{3,5}$, то точка E_0+E_1 принадлежит касательной плоскости к поверхности V_4 в точке E_2 и описывает трехмерную поверхность V_3 на абсолютной квадрике, а луч E_1E_2 гиперкомплекса пересекает поверхность V_3 в точке E_0+E_1.

Тем самым доказали, что гиперкомплекс (11) состоит из трехпараметрического множества связок прямых с центрами на поверхности V_3, которая принадлежит абсолютной квадрике, а прямые E_2E_3, E_2E_4, E_2E_5 репера касаются поверхности V_4 в точке E_2, то есть образуют специальный гиперкомплекс. Такой гиперкомплекс назовем ***вырожденным специальным гиперкомплексом.***

При $k=-1$ гиперкомплекс задается уравнением

$$\omega_0^2=-\omega_1^2 \qquad (12)$$

и отличается от гиперкомплекса (11) лишь тем, что касательная гиперплоскость к поверхности V_4, которую описывает точка E_2, содержит точку $E_0 - E_1$, то есть получается из (11) перенумеровыванием точек $E_0 - E_1$ и $E_0 + E_1$.

Аналогичное строение имеют гиперкомплексы, задаваемые уравнениями:

$$\omega_0^3 = \pm\omega_1^3,\ \omega_0^4 = \pm\omega_1^4,\ \omega_0^5 = \pm\omega_1^5.$$

Все их можно привести к виду (12) или (11) перенумеровыванием вершин репера.

Геометрический смысл выбора репера первого порядка для гиперкомплекса прямых (11) состоит в следующем.

При неподвижной прямой гиперкомплекса $(E_0 E_1)$ известна точка E_0 или E_1 и касательная 3-плоскость P_3 к поверхности, которую эта точка описывает. Трехмерное пространство Π_3, сопряженное в ${}^1S_5$ прямой $E_0 E_1$, пересекает P_3, как следует из (11), по плоскости $P_2 = A_3 A_4 A_5$. Точка E_2 является сопряженной для P_2 в пространстве P_3. С помощью одного параметра зададим точку E_0 на известной прямой и найдём с помощью трех параметров точки A_3, A_4, A_5 из условия их сопряженности в плоскости P_2.

Если гиперкомплекс задается уравнением $\omega_0^2 = k\omega_1^2$, где k – инвариант нулевого порядка и $k \neq \pm 1, 0$, то в этом случае точка $E_0 - k\omega_2^1 E_1$ описывает четырехмерную поверхность, то есть гиперкомплекс является специальным и его репер первого порядка зависит от трех параметров.

Аналогичный вид имеют гиперкомплексы прямых, задаваемые уравнениями

$$\omega_0^i = k\omega_1^i,\ \omega_1^i = k\omega_1^j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{3,5} \text{ при } k{=}const.$$

Гиперкомплексы, задаваемые уравнениями $\omega_0^i = k\omega_0^j$, также являются специальными при $k{=}const$. С помощью замены базиса их можно привести к виду (9). Тем самым доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. В пространстве ${}^1S_5$ в репере первого порядка существует 7 типов гиперкомплексов: собственные и идеальные гиперкомплексы общего вида, собственные и идеальные гиперкомплексы постоянной кривизны, собственные и идеальные специальные гиперкомплексы, вырожденные специальные гиперкомплексы.

При этом репер первого порядка для гиперкомплексов общего вида и гиперкомплексов постоянной кривизны зависит от одного параметра, для специальных гиперкомплексов – от трех параметров, а для вырожденных специальных – от четырех параметров.

Теорема 4. Для гиперкомплексов общего вида, гиперкомплексов постоянной кривизны и специальных гиперкомплексов существует канонический репер второго порядка. Для вырожденных специальных гиперкомплексов канонический репер не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринцевичюс, К.И. Дифференциальная окрестность второго порядка луча комплекса в многомерном проективном пространстве [Текст] // Литовский математический сборник. – 1960 – Т. 52 – № 4 – С. 991–1020.
2. Зацепина, О.В. Инфлекционно-метрический комплекс прямых в четырёхмерном пространстве Лобачевского [Текст] // Вестник РГПУ. – 2005. № 1. – С. 91–98.
3. Киотина, Г.В. Комплексы прямых в пространствах E_3^2, Ap_3^0, $^1S_3$ [Текст] / Г.В. Киотина, О.В. Зацепина, Н.В. Жмурова // Геометрия в целом. Преподавание геометрии в ВУЗе и школе : материалы Всерос. науч.-метод. конф. – Великий Новгород, 2004.
4. Киотина, Г.В. Классификация комплексов прямых в репере первого порядка в пространстве E_3^2 [Текст] // Известия Саратовского университета. – 2011. – Т. 11.
5. Киотина, Г.В. Комплексы прямых в бифлаговом пространстве [Текст] // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2012. – № 35.
6. Розенфельд, Б.А. Гиперкомплексы прямых в евклидовом и неевклидовых пространствах [Текст] / Б.А. Розенфельд, О.В. Зацепина, П.Г. Стеганцева // Известия вузов. Математика. – 1990. – № 3. – С. 57–66.

O.V. Zatsepina

CLASSIFICATION OF FIVE-DIMENSIONAL HYPERCOMPLEXES OF LINES OF THE FIRST ORDER NEIGHBORHOOD

In Lobachevskian geometry semiparametric complexes of lines are called hypercomplexes of lines. Hypercomplexes of lines are investigated by Elie Cartan's method of external forms. The paper specifies hypercomplex vectors and provides a geometric interpretation of their choice. The paper deals with intrinsic and ideal hypercomplexes of lines, constant scalar curvature, degenerated hypercomplexes of lines.

hypercomplexes of lines in Lobachevskian five-dimensional space, linear differential forms, Elie Cartan's external forms, first order neighborhood.