УДК 512.83

М.Т. Терехин, И.С. Потапова

УСЛОВИЯ ПРИВЕДЕНИЯ МАТРИЦЫ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Исследуется проблема преобразования матрицы с переменными коэффициентами. Предложен метод построения матрицы, которая с помощью постоянной неособенной матрицы может быть преобразована в диагональную.

транспонированная матрица, алгебраическое дополнение, скалярное произведение, задача Коши.

При исследовании свойств решений систем линейных дифференциальных уравнений существенную роль играет наличие явного представления функциональной матрицы линейной однородной системы. С этой целью интерес представляет проблема существования методов приведения матрицы к диагональному виду. В статье с использованием методики исследования этой проблемы, предложенной в работе [1], рассматриваются условия преобразования матрицы к диагональному виду.

Пусть дана постоянная матрица $A=(a_{ij})_1^n$ и n-мерные постоянные векторы λ_k, μ_k, $k=\overline{1,n}$, определенные равенствами $\lambda_k = colon(\lambda_{11}^{(k)},\lambda_{21}^{(k)},\ldots,\lambda_{n1}^{(k)})$, $\mu_k=(\mu_{11}^{(k)},\mu_{12}^{(k)},\ldots,\mu_{1n}^{(k)})$. Тогда $(\lambda_k\mu_k)=[colon(\lambda_{11}^{(k)}\mu_{11}^{(k)},\, \lambda_{21}^{(k)}\mu_{11}^{(k)},\ldots,\lambda_{n1}^{(k)}\mu_{11}^{(k)}),$ $colon(\lambda_{11}^{(k)}\mu_{12}^{(k)},\, \lambda_{21}^{(k)}\mu_{12}^{(k)},\ldots,\lambda_{n1}^{(k)}\mu_{12}^{(k)}),\ldots,\quad colon(\lambda_{11}^{(k)}\mu_{12}^{(k)},\lambda_{21}^{(k)}\mu_{12}^{(k)},\ldots,\lambda_{n1}^{(k)}\mu_{12}^{(k)})]$ или, что все равно, $(\lambda_k\mu_k)=(\lambda^{(k)}\mu_{11}^{(k)},\lambda^{(k)}\mu_{12}^{(k)},\ldots,\lambda^{(k)}\mu_{1n}^{(k)})$.

Векторы $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ выберем так, чтобы матрица $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ олжны быть векторы $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, чтобы выполнялись равенства

$$A=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\mu_k)\,, \tag{1}$$

$$(\mu_k,\lambda_p)=\begin{cases}0 & при\ p\neq k,\\ c_k & при\ p=k,\end{cases} \tag{2}$$

где (μ_k, λ_p) – скалярное произведение векторов μ_k, λ_p, c_k – некоторое число, но такое, что возможно существование натурального числа m, $1 \le m \le n$, при котором $c_k \ne 0$, если $1 \le k \le m$, $c_k = 0$, если $m < k \le n$.

Из равенства (1) следует, что

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{11}^{(k)} \mu_{11}^{(k)}, a_{21} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{21}^{(k)} \mu_{11}^{(k)}, \ldots, a_{n1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n1}^{(k)} \mu_{11}^{(k)}, \quad (3)$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{11}^{(k)} \mu_{12}^{(k)}, a_{22} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{21}^{(k)} \mu_{12}^{(k)}, \ldots, a_{n2} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n1}^{(k)} \mu_{12}^{(k)}, \ldots, \quad (4)$$

$$a_{1n} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{11}^{(k)} \mu_{1n}^{(k)}, a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{21}^{(k)} \mu_{1n}^{(k)}, \ldots, a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n1}^{(k)} \mu_{1n}^{(k)}. \quad (5)$$

Из систем (3), (4) и (5) получим соответственно

$$\mu_{11}^{(k)} = \frac{\det(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, a_1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n)}{\det \Lambda}, \quad (6)$$

$$\mu_{12}^{(k)} = \frac{\det(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, a_2, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n)}{\det \Lambda}, \quad (7)$$

$$\mu_{1n}^{(k)} = \frac{\det(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, a_n, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n)}{\det \Lambda}, \quad (8)$$

где $k = \overline{1,n}$, $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk})$.

Следовательно, равенства (6), (7) и (8) определяют векторы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, удовлетворяющие равенству (1).

Векторы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ определим так, чтобы выполнялось равенство (2). С этой целью составим следующие системы уравнений:

$$(\mu_1, \lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(1)} \lambda_{k1}^{(1)} = c_1, \ (\mu_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(1)} \lambda_{k1}^{(2)} = 0, \ \ldots, \ (\mu_1, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(1)} \lambda_{k1}^{(n)} = 0; \quad (9)$$

$$(\mu_2, \lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(2)} \lambda_{k1}^{(1)} = 0, (\mu_2, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(2)} \lambda_{k1}^{(2)} = c_2, \ldots, (\mu_1, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(1)} \lambda_{k1}^{(n)} = 0; \ldots, \quad (10)$$

$$(\mu_n, \lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(n)} \lambda_{k1}^{(1)} = 0, \ (\mu_n, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(1)} \lambda_{k1}^{(2)} = 0, \ \ldots, \ (\mu_n, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1k}^{(n)} \lambda_{1k}^{(n)} = c_n, ; \quad (11)$$

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ − некоторый ненулевой постоянный вектор.

Символом $\Lambda_{j1}^{T(k)}$ обозначим алгебраическое дополнение элемента $\lambda_{j1}^{(k)}$ матрицы Λ^T (Λ^T − транспонированная матрица по отношению к матрице Λ^T).

Из системы (9) находим

$$\mu_{11}^{(1)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_1 \Lambda_{11}^{T(1)},\ \mu_{12}^{(1)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_1 \Lambda_{21}^{T(1)},\ \ldots,\ \mu_{1n}^{(1)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_1 \Lambda_{n1}^{T(1)}. \tag{12}$$

Из системы (10) следует, что

$$\mu_{11}^{(2)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_2 \Lambda_{11}^{T(2)},\ \mu_{12}^{(2)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_2 \Lambda_{21}^{T(2)},\ \ldots,\ \mu_{1n}^{(2)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_2 \Lambda_{n1}^{T(2)}. \tag{13}$$

Из системы (11) получим

$$\mu_{11}^{(n)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_n \Lambda_{11}^{T(n)},\ \mu_{12}^{(n)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_n \Lambda_{21}^{T(n)},\ \ldots,\ \mu_{1n}^{(n)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_n \Lambda_{n1}^{T(n)}. \tag{14}$$

Тогда, учитывая равенства (6), (7), (8), (12), (13) и (14), будем иметь при любых $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$

$$\mu_{1i}^{(k)} = \frac{\det(\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{k-1} a_i \lambda_{k+2} \ldots \lambda_n)}{\det\Lambda},\ \mu_{1i}^{(k)} = \frac{1}{\det\Lambda} c_k \Lambda_{i1}^{T(k)}.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть векторы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что матрица Λ неособенная, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ − ненулевой вектор. Тогда, для того чтобы выполнялись равенства (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы при любых $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$ выполнялись равенства

$$\begin{aligned} c_k \Lambda_{i1}^{T(k)} &= \det(\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{k-1} a_i \lambda_{k+2} \ldots \lambda_n), \\ c_k \Lambda_{i1}^{T(k)} &= \mu_{i1}^{(k)} \det\Lambda. \end{aligned} \tag{15}$$

Заметим, что из выполнимости равенств (9), (10) и (11) следует, что вектор $c = ((\mu_1, \lambda_1), (\mu_2, \lambda_2), \ldots, (\mu_n, \lambda_n))$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливо равенство $A\Lambda = \Lambda C$, где $C = diag[(\mu_1, \lambda_1), (\mu_2, \lambda_2), \ldots, (\mu_n, \lambda_n)]$.

Доказательство. Методом вычисления устанавливаем, что при любых $k = \overline{1,n}$ $(\lambda_k \mu_k)\Lambda = (0_1^n{}_1^{k-1}, \lambda_k(\mu_k, \lambda_k), 0_1^n{}_{k+1}^n)$, $0_1^n{}_1^{k-1}, 0_1^n{}_{k+1}^n$ − матрицы с нулевыми элементами. Следовательно, с одной стороны,

$A\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k \Lambda = [\lambda_1(\mu_1, \lambda_1), \lambda_2(\mu_2, \lambda_2), \ldots, \lambda_n(\mu_n, \lambda_n)]$, с другой стороны, учитывая, что $\lambda_k(\mu_k, \lambda_k) = colon(\lambda_{11}^{(k)}, \lambda_{21}^{(k)}, \ldots, \lambda_{n1}^{(k)})(\mu_k, \lambda_k)$, получим $A\Lambda = \Lambda C$. Теорема доказана.

Теорема 2 может оказаться полезной при нахождении решений линейной системы дифференциальных уравнений.

Отметим, что если $m < n$, то вектор c определяется равенством $c = ((\mu_1, \lambda_1), (\mu_2, \lambda_2), \ldots, (\mu_m, \lambda_m), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m})$, матрица C − равенством

$$C = diag[(\mu_1, \lambda_1), (\mu_2, \lambda_2), \ldots, (\mu_m, \lambda_m), 0, 0, \ldots, 0].$$

Следовательно,
$A\Lambda = \Lambda C = [\lambda_1(\mu_1, \lambda_1),\ \lambda_2(\mu_2, \lambda_2), \ldots, \lambda_m(\mu_m, \lambda_m), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m}]$.

Пример 1. Пусть дана матрица
$A = [colon(-3, -8, -6),\ colon(0,1,0),\ colon(4,\ 8,7)]$. Ставится задача: определить векторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, μ_1, μ_2, μ_3 так, чтобы выполнялось равенство

$$A = (\lambda_1 \mu_1) + (\lambda_2 \mu_2) + (\lambda_3 \mu_3), \tag{16}$$

в котором при любом $i = \overline{1,3}$, $\lambda_i = colon(\lambda_{11}^{(i)}, \lambda_{21}^{(i)}, \lambda_{31}^{(i)})$, $\mu_i = (\mu_{11}^{(i)}, \mu_{12}^{(i)}, \mu_{13}^{(i)})$, при условии, что

$$(\mu_i, \lambda_j) = \begin{cases} \neq 0 & при\ i = j, \\ 0 & при\ i \neq j, \end{cases} \tag{17}$$

(μ_i, λ_j) − скалярное произведение векторов μ_i, λ_j.

Задачу будем решать, предположив, что матрица $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ известная и определяется равенством $\Lambda = [colon(1,2,1), colon(2,4,3), colon(0,3,0)]$, $\det \Lambda = -3$.

Для определения векторов μ_1, μ_2, μ_3, удовлетворяющих равенству (17), требуется найти решение систем уравнений вида

$$\begin{aligned} (\mu_1, \lambda_1) &= \mu_{11}^{(1)} + 2\mu_{12}^{(1)} + \mu_{13}^{(1)} = c_1, \\ (\mu_1, \lambda_2) &= 2\mu_{11}^{(1)} + 4\mu_{12}^{(1)} + 3\mu_{13}^{(1)} = 0, \\ (\mu_1, \lambda_3) &= \qquad 3\mu_{12}^{(1)} = 0; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} (\mu_2, \lambda_1) &= \mu_{11}^{(2)} + 2\mu_{12}^{(2)} + \mu_{13}^{(2)} = 0, \\ (\mu_2, \lambda_2) &= 2\mu_{11}^{(2)} + 4\mu_{12}^{(2)} + 3\mu_{13}^{(2)} = c_2, \\ (\mu_2, \lambda_3) &= \qquad 3\mu_{12}^{(2)} = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} (\mu_3, \lambda_1) &= \mu_{11}^{(3)} + 2\mu_{12}^{(3)} + \mu_{13}^{(3)} = 0, \\ (\mu_3, \lambda_2) &= 2\mu_{11}^{(3)} + 4\mu_{12}^{(3)} + 3\mu_{13}^{(3)} = 0, \\ (\mu_3, \lambda_3) &= \qquad 3\mu_{12}^{(3)} = c_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Основной матрицей систем (18), (19) и (20) является транспонированная по отношению к матрице Λ матрица Λ^T, $\det\Lambda^T = -3$. Предположив, что $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 3$, устанавливаем: решением системы (18) является вектор $\mu_1 = (3,0,-2)$, решением системы (19) – вектор $\mu_2 = (-3,0,3)$, решением системы (20) – вектор $\mu_3 = (-2/3,1/3,0)$.

Путем непосредственного вычисления можно установить, что равенство (16) выполняется, если учесть, что
$(\lambda_1\mu_1) = [colon(3,6,3), colon(0,0,0), colon(-2,-4,-2)]$,
$(\lambda_2\mu_2) = [colon(-6,-12,-9), colon(0,0,0), colon(6,12,9)]$,
$(\lambda_3\mu_3) = [colon(0,-2,0), colon(0,1,0), colon(0,0,0)]$.

Убедимся, что $A\Lambda = \Lambda C$, где $C = diag[(\mu_1,\lambda_1),(\mu_2,\lambda_2),(\mu_3,\lambda_3)]$, $(\mu_1,\lambda_1) = 1$, $(\mu_2,\lambda_2) = 3$, $(\mu_3,\lambda_3) = 1$. Действительно, учитывая равенство (16), получим
$A\Lambda = [(\lambda_1\mu_1) + (\lambda_2\mu_2) + (\lambda_3\mu_3)][colon(1,2,1), colon(2,4,3), colon(0,3,0)] = [colon(1,2,1),$ $colon(0,0,0), colon(0,0,0)] + [colon(0,0,0), colon(6,12,9), colon(0,0,0)] + [colon(0,0,0),$ $colon(0,0,0), colon(0,3,0)] = [colon(1,2,1), colon(6,12,9), colon(0,3,0)]$.

Кроме того, учитывая, что $C = diag(1,3,1)$, получим $\Lambda C = [colon(1,$ $2,1), colon(6,12,9), colon(0,3,0)]$, то есть $A\Lambda = \Lambda C$.

Исследуем проблему существования невырожденного преобразования матрицы с переменными элементами в диагональную матрицу.

Пусть дана матрица $A(t)$, определенная на сегменте $[a,b]$.

Определение. Множество $W_n = \{(\lambda_k\mu_k) : k = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}\}$ назовем множеством согласованных матриц, если $(\mu_k,\lambda_k) \neq 0, k = \overline{1,n}$,
$(\mu_k,\lambda_i) = 0, k = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}, k \neq i$.

Из теоремы 1 следует, что если $\det\Lambda \neq 0$, то для того, чтобы W_n было множеством согласованных матриц, необходимо и достаточно, чтобы при любых $k = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$ для любых векторов λ_k и μ_i выполнялись равенства (15). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3[1]. Если $\det\Lambda \neq 0$ и матрицу $A(t)$ можно представить равенством $A(t) = \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k\mu_k)f_k(t)$, в котором $m \leq n$, при любом $k = \overline{1,m}$ матрица $(\lambda_k\mu_k) \in W_m$, $f_k(t)$ – известная функция, определенная на сегменте $[a,b]$, то при любом $t \in [a,b]$ справедливо равенство $A(t)\Lambda = \Lambda C(t)$, где

$$C(t) = diag[(\mu_1,\lambda_1)f_1(t),(\mu_2,\lambda_2)f_2(t),\ldots,(\mu_m,\lambda_m)f_m(t),\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-m}].$$

Доказательство. Действительно (см. доказательство теоремы 2), с одной стороны, при любом $k=\overline{1,m}$ $(\lambda_k\mu_k)\Lambda f_k(t) = (0_{1\,1}^{n\,k-1},\lambda_k(\mu_k,\lambda_k)f_k(t),0_{1\,k+1}^{n\,n})$. Следовательно, $A(t)\Lambda = \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k\mu_k)\Lambda f_k(t) =$ $[\lambda_1(\mu_1,\lambda_1)f_1(t),\lambda_2(\mu_2,\lambda_2)f_2(t),\ldots,$ $\lambda_m(\mu_m,\lambda_m)\cdot\cdot f_m(t),\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-m}]$.

С другой стороны, учитывая, что при любом $k=\overline{1,m}$ $\lambda_k(\mu_k,\lambda_k)f_k(t) =$ $= colon(\lambda_{11}^{(k)},\lambda_{21}^{(k)},\ldots,\lambda_{n1}^{(k)})(\mu_k,\lambda_k)f_k(t)$, получим справедливость равенства $A(t)\Lambda = \Lambda C(t)$. Теорема доказана.

Из проведенных рассуждений следует, что любая пара $(\Lambda, c(t))$, в которой Λ – неособенная $n\times n$-матрица, $c(t) = (c_1f_1(t),c_2f_2(t),\ldots,c_nf_n(t))$, при любом $i=\overline{1,n}$ c_i – произвольное, но фиксированное число, $f_i(t)$ – произвольная, но фиксированная функция, заданная на сегменте $[a,b]$, определяет матрицу $A(t)$, которая может быть преобразована в диагональную. В частности, если для любого $i=\overline{1,n}$, $f_i(t)\equiv 1$ на сегменте $[a,b]$, то пара (Λ,c), $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ определяет постоянную матрицу, которая может быть преобразована в диагональную.

Пример 2. Пусть задана пара $(\Lambda, c(t))$, в которой $\Lambda = [colon(1,1/2,1/3),$ $colon(1,1,1/3),$ $colon(-3,0,1)]$, $c(t) = (1,-2(t+1/2t^2),0)$. Очевидно, что $\lambda_1 = colon(1,1/2,1/3)$, $\lambda_2 = colon(1,1,1/3)$, $\lambda_3 = colon(-3,0,1)$. Векторы $\mu_1 = (\mu_{11}^{(1)},\mu_{12}^{(1)},\mu_{13}^{(1)})$, $\mu_1 = (\mu_{11}^{(2)},\mu_{12}^{(2)},\mu_{13}^{(2)})$, $\mu_1 = (\mu_{11}^{(3)},\mu_{12}^{(3)},\mu_{13}^{(3)})$ определим согласно равенствам

$$\begin{aligned}
&(\mu_1,\lambda_1) = \mu_{11}^{(1)} + \tfrac{1}{2}\mu_{12}^{(1)} + \tfrac{1}{3}\mu_{13}^{(1)} = 1,\\
&(\mu_1,\lambda_2) = \mu_{11}^{(1)} + \mu_{12}^{(1)} + \tfrac{1}{3}\mu_{13}^{(1)} = 0,\\
&(\mu_1,\lambda_3) = -3\mu_{11}^{(1)} + \mu_{13}^{(1)} = 0;
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&(\mu_2,\lambda_1) = \mu_{11}^{(2)} + \tfrac{1}{2}\mu_{12}^{(2)} + \tfrac{1}{3}\mu_{13}^{(2)} = 0,\\
&(\mu_2,\lambda_2) = \mu_{11}^{(2)} + \mu_{12}^{(2)} + \tfrac{1}{3}\mu_{13}^{(2)} = -2,\\
&(\mu_2,\lambda_3) = -3\mu_{11}^{(2)} + \mu_{13}^{(2)} = 0;
\end{aligned} \tag{22}$$

$$(\mu_3,\lambda_1)=\mu_{11}^{(3)}+{}^1\!/_2\,\mu_{12}^{(3)}+{}^1\!/_3\,\mu_{13}^{(3)}=0,$$
$$(\mu_3,\lambda_2)=\mu_{11}^{(3)}+\mu_{12}^{(3)}+{}^1\!/_3\,\mu_{13}^{(3)}=0, \qquad (23)$$
$$(\mu_3,\lambda_3)=-3\mu_{11}^{(3)}+\mu_{13}^{(3)}=0.$$

Разрешая системы (21), (22) и (23), получим, что $\mu_1=(1,-2,3)$, $\mu_2=(1,-4,3)$, $\mu_3=(0,0,0)$. Множество W_2 (множество согласованных матриц A_1, A_2) определим равенствами: $A_1=(\lambda_1\mu_1)=[colon(1,1/2,1/3)$, $colon(-2,-1,-2/3)$, $colon(3,3/2,1)]$,
$A_2=(\lambda_2\mu_2)=[colon(1,1,1/3),colon(-4,-4,-4/3),colon(3,3,1)]$. Матрица $A_3=(\lambda_3\mu_3)$ – нулевая.

Матрицу $A(t)$ зададим так: $A(t)=A_1+A_2(t+\frac{1}{2}t^2)=[colon(t+\frac{1}{2}t^2+1,$ $t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2},\frac{1}{3}t+\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{3}),colon(-2t^2-4t-2,-2t^2-4t-1,-\frac{2}{3}t^2-\frac{4}{3}t-\frac{2}{3}),$ $colon(3t+\frac{3}{2}t^2+3,3t+\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2},t+\frac{1}{2}t^2+1]$.

Определив матрицу $C(t)$ согласно равенству $C(t)=diag(1,-2(t+\frac{1}{2}t^2),0)$, с помощью вычисления устанавливаем, что $A(t)\Lambda=\Lambda C(t)$. Действительно, с одной стороны,
$A(t)\Lambda=\lambda_1\mu_1\Lambda+\lambda_2\mu_2\Lambda(t+\frac{1}{2}t^2)=\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,-2,0)(t+$ $+\frac{1}{2}t^2)=[colon(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}),\ colon(-2t-t^2,-2t-t^2,-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}t^2),colon(0,0,0)]$.
С другой стороны,
$\Lambda C(t)=[colon(1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}),colon(1,1,\frac{1}{3}),colon(-3,0,1)]diag(1,-2(t+\frac{1}{2}t^2),\ 0)=$ $[colon(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}),colon(-2t-t^2,-2t-t^2,\ -\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}t^2),colon(0,0,0)]$, то есть $A(t)\Lambda=\Lambda C(t)$ при любом t.

Найдем решение задачи Коши системы $\dot{x}=A(t)x$, в которой $A(t)$ – матрица, определенная в рассматриваемом примере. Систему $\dot{x}=A(t)x$ путем замены переменных $y=\Lambda x$ преобразуем в систему $\dot{y}=C(t)y$, решение $y(t)$ $(y(0)=\beta)$ которой определится равенством $y(t)=Y(t)\beta$,

$Y(t)=[colon(e^t,0,0),colon(0,e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)},0),colon(0,0,1)]$,

$Y(t)$ – фундаментальная матрица, $Y(0)=E$, E – единичная матрица. Тогда решение $x(t)$ системы $\dot{x}(t)=A(t)x$ запишется как $x(t)=\Lambda^{-1}Y(t)\beta$.

Учитывая $\Lambda^{-1}=[colon(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}),colon(-2,2,0),colon(3,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})]$ и полагая $\beta=\Lambda\alpha$, получим $x(t)=\Lambda^{-1}Y(t)\Lambda\alpha=\Lambda^{-1}[colon(e^t,\frac{1}{2}e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)},\frac{1}{3}),colon(e^t,$ $e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)},\frac{1}{3}),$ $colon(-3e^t,0,1)]\alpha$. Определив матрицу $X(t)$ равенством $X(t)=\Lambda^{-1}Y(t)\Lambda=$ $[colon(e^t-e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)}+1,-\frac{1}{2}e^t+e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)}-\frac{1}{2},0),colon(e^t-$ $-2e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)}+1,-\frac{1}{2}e^t+2e^{-(t^2+\frac{1}{3}t^3)}-\frac{1}{2},0),colon(-3t+3,\frac{3}{2}e^t-\frac{3}{2},1)]$, получим, что $x(t)=X(t)\alpha$ ($X(0)=E$) – решение задачи Коши системы $\dot{x}(t)=A(t)x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ретюнских, Н.В. [Текст] Критерий приведения матрицы $A(t)$ к диагональному или треугольному виду с помощью постоянной матрицы // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2002. – № 6. – С. 72–76.

REFERENCES

1. Retunskih, N.V. Criteria of matrix reduction to diagonal or triangular form by means of a constant matrix// Izvestia Akademii Estesvennih nauk [Bulletin of Russian Academy of Natural Sciences]. Differential equations. – 2002. – №6. – P.72–76.

M.T. Teryokhin, I.S. Potapova

THE CONDITIONS OF REDUCION THE MATRIX TO DIAGONAL FORM

It is investigated the problem of transformation of matrix with variable elements. It is proposed the method of construction of matrix, which maybe transformated into of matrix by means of constant non-singular matrix.

transposed a matrix, algebraical adjunct, scalar product, problem of Coshy.