

Ю.В. Усачёв, В.Н. Курашин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЙ ПАРАШЮТИСТА

Исследуется математическая модель движений парашютиста. Получены уравнения движения, баллистико-временные характеристики, движения парашютиста рассматриваются с использованием матриц состояния.

время, движение, матрица, парашютист, уравнение.

Процесс построения математической модели движений парашютиста включает решение двух задач: определение баллистико-временных характеристик движения центра масс парашютиста и описание движений во время прыжка для изменения аэродинамических характеристик с целью управления парашютной системой.

При решении первой задачи приходится выбирать упрощенную математическую модель, вполне доступную для аналитического исследования и в то же время сохраняющую наиболее характерные черты исходного объекта. Для этого проводится анализ, определение, систематизация постоянных и временных параметров. Регулярных и достаточно обоснованных методов построения нелинейных математических моделей в настоящее время не существует. В большинстве случаев для этой цели применяют какие-либо эвристические процессы или используют метод проб и ошибок¹. К постоянным параметрам относятся: H – высота выброса парашютиста; V_0 – скорость самолета; k – вес, рост парашютиста; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность воздуха; T – температура воздуха. К временным (переменным) параметрам относятся: t_n – время десантирования, w – скорость ветра; V – скорость парашютиста; u – скорость восходящих (нисходящих) потоков; d – снос (расстояние от проекции на землю точки выброса до точки приземления); C – коэффициент лобового сопротивления десантируемого объекта; F – мидель десантируемого объекта.

Процесс прыжка можно разбить на следующие основные этапы: первый этап – падение после отделения от самолета; второй этап – снижение на стабилизирующем парашюте; третий этап – наполнение купола основного парашюта; четвертый этап – снижение на раскрытом парашюте.

Для каждого этапа составляются системы дифференциальных уравнений, описывающие движение парашютиста при соответствующих допущениях. Рассмотрим сначала стандартную модель, в которой не учитывается влияние ветра,

¹ Чуркин В.М. Динамика парашютных систем на этапе спуска : моногр. М. : Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2008. С. 49.

восходящих и нисходящих потоков. Эту модель прыжка можно рассматривать как модель прыжка в штилевую погоду.

Выберем неподвижную систему координат $O_I \xi \eta \zeta$ с центром в точке выброса O_I . Ось $O_I \eta$ совпадает с направлением горизонтальной составляющей скорости ζ самолета; ось $O_I \zeta$ направлена вертикально вверх; ось O перпендикулярна $O_I \eta$; $O_I \zeta$ и система координат $O_I \xi \eta \zeta$ правая. Будем предполагать, что движение парашютиста плоское, то есть происходит в плоскости $O_I \eta \zeta$. Для каждого из первых трех этапов составляется система дифференциальных уравнений. Считаем, что на парашютиста, кроме веса, действует сила сопротивления воздуха \vec{F}_C , пропорциональная квадрату скорости парашютиста ($F_C = k \cdot V^2$). При этом $k = \rho \frac{C \cdot F}{2}$, где ρ – плотность воздуха, C – коэффициент лобового сопротивления, F – мидель тела.

В практике расчетов за величину миделя принимают квадрат роста; значение C находят из специальных таблиц². Через θ обозначен угол наклона траектории. При сделанных предположениях для компонент V_ζ , V_η вектора скорости V имеем

$$\begin{cases} m \frac{dV_\zeta}{dt} = -mg + F_C \cdot \sin \theta, \\ m \frac{dV_\eta}{dt} = -F_C \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

Поделив на m левые и правые части уравнений полученной системы и обозначив $\frac{k}{m}$ через r , получим

$$\begin{cases} m \frac{dV_\zeta}{dt} = -g + r \cdot \sin \theta \cdot V^2, \\ m \frac{dV_\eta}{dt} = -r \cdot \cos \theta \cdot V^2. \end{cases} \quad (1)$$

Запишем уравнения движения парашютиста в виде системы дифференциальных уравнений относительно функций V , θ , ζ . Воспользуемся тем, что $\frac{d\zeta}{dt} = -V \cdot \sin \theta$. Дифференцируя по времени соотношение $V^2 = V_\zeta^2 + V_\eta^2$

и учитывая систему (1), находим $\frac{dV}{dt} = g \cdot \sin \theta - rV^2$.

Для угла θ можно получить уравнение $\frac{d\theta}{dt} = \frac{g \cdot \cos \theta}{V}$.

² Герасименко И.А. Воздушно-десантная подготовка : учеб. М. : Воениздат, 1986. Ч. 1. С. 32.

Таким образом, при начальных условиях $V(0) = V_0$, $\theta(0) = 0$, $\zeta(0) = 0$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} = -V \cdot \sin\theta, \\ \frac{dV}{dt} = g \cdot \sin\theta - rV^2, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{g \cdot \cos\theta}{V}. \end{cases} \quad (2)$$

Интегрирование нелинейной системы (2) достаточно сложно. Вернемся к системе (1) и предположим, что на рассматриваемом этапе прыжка величина θ постоянна. Тогда, выражая V^2 из каждого уравнения (1) и приравнявая их друг к другу, найдем, что

$$\frac{dV_\zeta}{dt} + \operatorname{tg}\theta \cdot \frac{dV_\eta}{dt} = -g. \quad (3)$$

Подставляя выражение $\frac{dV_\zeta}{dt}$ из (3) во второе уравнение системы (2), получим для определения $V_\eta(t)$ дифференциальное уравнение Рикатти:

$$\frac{dV_\eta}{dt} = aV_\eta^2 + b(t)V_\eta + c(t), \quad V_\eta(0) = V_0 \quad (4)$$

Приближенное решение уравнения (4) находим с помощью степенного ряда. Затем последовательно определим $V_\zeta(t)$, $\zeta(t)$, $\eta(t)$ и их значения в конце каждого из первых трех этапов прыжка.

На четвертом этапе уравнения движения имеют вид

$$\frac{dV_\zeta}{dt} = -g + kV_\zeta^2, \quad V_\eta(t) = \operatorname{const}.$$

Относительно вертикальной составляющей $V_\eta(t)$ скорости парашютиста получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое нетрудно решается.

Описанные выше подходы позволяют построить баллистико-временную модель стандартного прыжка. Учет скорости ветра \vec{w} , а также скорости \vec{u} восходящих (нисходящих) потоков можно учесть в модели, рассматривая их как переносные скорости по отношению к движению в системе координат $O_1\eta\zeta$. Тогда абсолютная скорость \vec{V}_a парашютиста определяется как $\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{w} + \vec{u}$, где \vec{V} – скорость в штилевую погоду (стандартная модель).

Перейдем далее к рассмотрению второй задачи: определению положения парашютиста во время прыжка. Баллистико-временная модель определяет движение центра масс парашютиста (точка O и время выполнения отдельных этапов прыжка). Информацию об ориентации тела парашютиста можно задавать в дискретные моменты времени, необязательно через равные промежутки между ними. Эти моменты определяются, например, алгоритмом действий парашютиста при совершении прыжка.

Будем считать, что центр масс парашютиста совпадает с некоторым фиксированным ориентиром (например, выход крестцового канала, являющийся жестким образованием). Дело в том, что при изменении позы центр масс смещается и может выйти даже за пределы тела. Ориентация тела характеризует его поворот относительно неподвижной системы координат (вверх головой, вниз головой, горизонтально и т.п.). Поза тела характеризует взаимное расположение звеньев тела относительно друг друга.

С парашютистом свяжем подвижную систему координат $Oxyz$, координатные оси которой являются пересечением трех взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через центр масс: сагиттальная, фронтальная, трансверсальная.

Сагиттальная плоскость разделяет тело на правую и левую части. Вертикальная плоскость, проходящая перпендикулярно к сагиттальной, называется фронтальной. Она разделяет тело на переднюю и заднюю части. Горизонтальную плоскость, проходящую перпендикулярно по отношению к этим двум плоскостям, называют трансверсальной. Она разделяет тело на верхнюю и нижнюю части³.

Ориентацию тела относительно неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$ можно задать тремя эйлеровыми углами: φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии, θ – угол нутации⁴. Так, если парашютист расположен в горизонтальной плоскости, то: $\varphi = \pi/2$; $\psi = \pi/2$; $\theta = \pi/2$.

Тело парашютиста считаем не неизменным твердым телом, а рассматриваем как систему подвижных звеньев (руки, ноги, голова).

При этом каждая рука (нога) представляется в виде двух звеньев. Выбор двухзвенного представления продиктован лишь простотой его описания и дальнейшего исследования. Положение каждого звена $l_i (i = 1, 2... 8)$ относительно системы координат $Oxyz$, связанной с парашютистом, задается тремя углами ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$), образованными звеном l_i с осями координат. Таким образом, для характеристики всех восьми звеньев (руки – ноги) строим матрицу размером 8×3 :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_8 & \beta_8 & \gamma_8 \end{pmatrix}.$$

³ Зациорский В.М. Биомеханика двигательного аппарата человека : учеб. М. : Физкультура и спорт, 1981. С. 105–137.

⁴ Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики : учеб. М. : Наука, 1969. Ч. 1. С. 92–94.

Можно решить задачу определения положения звеньев тела, записывая кинематические уравнения. Тогда нужно будет учитывать геометрические размеры звеньев и возможно обобщенные координаты q_i , которые характеризуют относительные перемещения звеньев. В результате кинематические уравнения записываются в виде

$$x(t) = f_1(q_i(t)), y(t) = f_2(q_i(t)), z(t) = f_3(q_i(t)).$$

Считается, что кинематические уравнения решают прямую задачу кинематики. Ее содержание заключается в определении положения звена в базовой системе по обобщенным координатам. Кинематические уравнения обычно выводят, рассматривая движение каждого звена и его связи с другими звеньями. В случае сложной конфигурации кинематические уравнения получаются с помощью специального аппарата, использующего матричные преобразования и так называемые однородные координаты⁵.

Движения головы парашютиста (повороты вправо, влево; наклоны вверх, вниз, вправо, влево) зададим с помощью трех углов δ , ε , λ . Представим голову парашютиста в виде эллипсоида.

Пересечения эллипсоида с координатными плоскостями назовем соответственно сагиттальным, фронтальным, трансверсальным. Тогда угол δ характеризует поворот сагиттального сечения вокруг оси Oz ; угол ε определяет поворот сагиттального сечения вокруг оси Ox ; угол λ отражает поворот фронтального сечения вокруг оси Oy . Границы изменения углов δ , ε , λ определяются удобством для пользователя.

Таким образом, относительное положение звеньев парашютиста (голова, руки, ноги) задается с помощью матрицы состояния S размером 9×3 .

$$S = \begin{pmatrix} \delta & \xi & \lambda \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_8 & \beta_8 & \gamma_8 \end{pmatrix}.$$

Значения углов α_i , β_i , γ_i ($i = 1 \dots 8$) лежат в пределах от 0 до π , поскольку под углом между векторами понимается угол, не превосходящий π .

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие построение матрицы состояния при движении парашютиста.

Пример 1. Парашютист расположен в фронтальной плоскости (плоскость Oyz), руки и ноги опущены вниз. Положение головы: смотрит перед собой, повороты вправо, влево, вверх, вниз; наклоны отсутствуют.

В этом случае $\delta = \varepsilon = \lambda = 0$, $\alpha_i = \beta_i = \pi/2$, $\gamma_i = \pi$, $i = 1 \dots 8$.

⁵ Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов : учеб. М. : Наука, 1991. С. 238–302.

Матрица состояния имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Парашютист находится в плоскости Oyz . Положение звеньев рук и ног определяется как на рисунке 1, положение головы – как в примере 1.

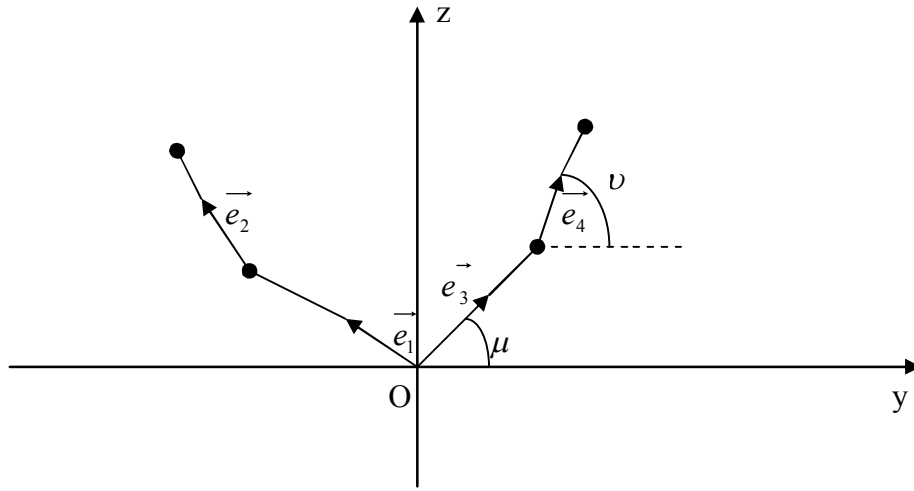


Рис. 1. Положение парашютиста № 2

Матрица состояния имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & \pi - \mu & \frac{\pi}{2} - \mu \\ \frac{\pi}{2} & \pi - \nu & \frac{\pi}{2} - \nu \\ \frac{\pi}{2} & \mu & \frac{\pi}{2} - \mu \\ \frac{\pi}{2} & \nu & \frac{\pi}{2} - \nu \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Положение звеньев рук и ног (в плоскости Oyz), как на рисунке 2. Положение головы, как в предыдущих примерах.

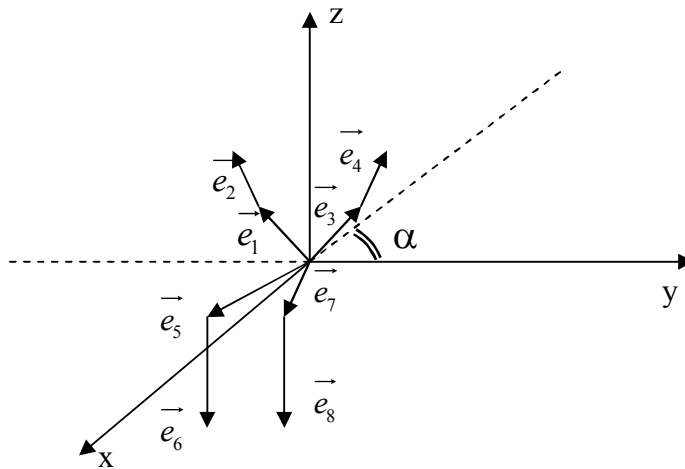


Рис. 2. Положение парашютиста № 3

Матрица состояния имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{2} & \pi - \alpha & \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha & \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi \end{pmatrix}.$$

Действия парашютиста на каждом этапе прыжка образуют определенную последовательность, которая может быть описана с помощью соответствующей последовательности матриц состояния

$$S_1, S_2 \dots S_b, S_{i+1} \dots S_N.$$

Количество N описываемых состояний и время перехода из состояния S_i в состояние S_{i+1} определяется из баллистико-временной модели прыжка или экс-пертно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики [Текст] : учеб. – М. : Наука, 1969. – Ч. 1. – 468 с.
2. Герасименко, И.А. Воздушно-десантная подготовка [Текст] : учеб. – М. : Военное изд-во, 1986. – Ч. 1. – 407 с.
3. Зациорский, В.М. Биомеханика двигательного аппарата человека [Текст] : учеб. – М. : Физкультура и спорт, 1981. – 246 с.
4. Крутько, П.Д. Управление исполнительными системами роботов [Текст] : учеб. – М. : Наука, 1991. – 334 с.
5. Чуркин, В.М. Динамика парашютных систем на этапе спуска [Текст] : моногр. – М. : Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2008. – 184 с.