МАТЕМАТИКА

УДК 330.115

М.Т. Терёхин, К.О. Политов

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ УРАВНЕНИЙ СВЯЗИ

При создании экономической системы (экономического предприятия) необходимо решить вопросы о структуре последней, методах управления, финансовом обеспечении, способах контроля за состоянием системы в любой момент времени, о возможных внешних воздействиях, о прогнозируемости получения желаемого результата и ряда других вопросов, которые могут возникнуть в процессе функционирования экономической системы.

Для решения этих вопросов и в целом вопроса жизнеспособности созданной экономической системы существенную помощь может оказать использование математических методов.

Основным методом является метод математического моделирования, создание и исследование математической модели, достаточно адекватно описывающей состояние созданной экономической системы в процессе ее развития.

вектор-функция, кредитная организация, минор, образ, определитель, производствен-ные фонды, прообраз, ранг, управление, фундаментальная матрица, функционал.

Ряд математических методов исследования экономических методов предложен в работах [1–6].

В статье приводится способ построения математической модели экономической системы, исследуется проблема разрешимости двухточечной краевой периодической задачи модели как при наличии, так и без уравнений связи, вводится понятие циклического развития экономической системы, определяются условия, при которых она имеет такое развитие.

1. Построение математической модели многосекторной экономической системы

Пусть $x(t)=\mathrm{colon}(x_1(t),\ x_2(t),\ \dots,\ x_n(t))$ – вектор-функция, в любой момент времени определяющая состояние экономической системы, при любом $i=\overline{1,n}$ $x_i(t)$ – объем производственных фондов i-го сектора, $u(t)=\mathrm{colon}(u_1(t),\ u_2(t),\ \dots,\ u_m(t))$ – вектор-управление, при любом $i=\overline{1,m}$ $u_i(t)$ – инвестиционный объем i-й кредитной организации.

Предположим, что за время от 0 до T прирост объема производственных фондов первого сектора равен $\overline{\Delta x_1}$. Этот прирост определяется износом оборудования, совершенствованием технологии производства (внедрением рационализаторских предложений, повышением производительности труда, выполнением других мероприятий, не трбующих дополнительных капиталовложений), влиянием кредитных организаций, влинием определенной части производственных объемов других секторов. Следовательно,

$$\overline{\Delta x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \ldots + b_{1m}u_m + f_1,$$

где $a_{11} = -\gamma_{11}^{(1)} - \gamma_{11}^{(2)} + \gamma_{11}^{(3)} - \gamma_{11}^{(4)}$, $\gamma_{11}^{(1)}$ – коэффициент, определяющий износ оборудования, $\gamma_{11}^{(2)}$ – коэффициент, определяющий часть объема первого сектора, вложенного в экономику других секторов, $\gamma_{11}^{(3)}$ – коэффициент, определяющий прирост объема производственных фондов первого сектора в результате совершенствования технологии производства, $\gamma_{11}^{(4)}$ – коэффициент, определяющий, какая доля объемов производственных фондов идет на налоговые отчисления. При любом $i = \overline{2, n}$ a_{1i} – коэффициент, определяющий часть объема x_i, вложенную (инвестированную) в экономику первого сектора. При любом $i = \overline{1, m}$ b_{1i} – коэффициент, определяющий часть объема i-й кредитной организации, вложенную в экономику первого сектора, f_1 – объем вложений первого сектора в свое производство.

Допуская, что на любом достаточно малом отрезке времени Δt приращения объема первого сектора равны в силу малости Δt, получим, что приращение объема первого сектора за время от t до $t + \Delta t$ определится равенством

$$\Delta x_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{1j}(t)u_j(t) + f_1 \right) \Delta t.$$

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\dot{x}_1(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{1j}(t)u_j(t) + f_1.$$

Аналогично рассуждая, получим формулы для определения величин $\dot{x}_2(t)$, $\dot{x}_3(t)$, … , $\dot{x}_n(t)$. В частности, для определения $\dot{x}_i(t)$ будем иметь

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)u_j(t) + f_i.$$

Полагая

$$A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_1^n, \; B(t) = \left(b_{ij}(t)\right)_1^m, \; f(t) = \text{colon}(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)),$$

$$(t) = \text{colon}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$

полученные выше равенства запишем в векторной форме

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + f(t).$$

Следовательно, вектор-функция $x(t)$, определенная на сегменте [0, T] является решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t). \tag{1}$$

Из приведенных рассуждений следует, что систему дифференциальных уравнений (1) можно рассматривать в качестве математической модели развития экономической системы [1].

2. Двухточечная краевая периодическая задача и задача о циклическом развитии экономической системы

Рассмотрим математическую модель

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u + f(t)\,, \tag{2}$$

в которой x – n-мерный вектор, u – m-мерный вектор-управление, матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на сегменте [0, T], $m \le n$.

Введем следующие обозначения: $|y| = \max_i \{|y_i|\}$, $y \in E_s$, E_s – s-мерное векторное пространство, $M \times N$ – декартово произведение множеств M и N, $D_0 \subset E_n$, $U_0 \subset E_m$ – замкнутые, ограниченные множества.

При любых $\alpha \in D_0$, $u \in U_0$ модель (2) имеет решение

$$x(t) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(r)[B(r)u + f(r)]dr\,,$$

в котором $x(0) = \alpha$, $X(t)$ – фундаментальная матрица решений модели $\dot{x}(t) = A(t)x$, $X(0) = E$, E – единичная матрица. Такое решение будем называть решением, определенным векторами α и u. Далее рассматриваем только такие решения модели (2), которые определяются векторами $\alpha \in D_0$ и $u \in U_0$.

Функционал I, заданный на множестве решений модели (2), определим равенством

$$I(x) = \int_0^T \varphi(t, x)dt\,, \tag{3}$$

где функция $\varphi(t, x)$ определена и непрерывна на множестве [0, T] × E_n.

Определение. Будем говорить, что решение $x_0(t)$ модели (2) доставляет минимум функционалу (3), если $\int_0^T \varphi(t, x_0)dt \le \int_0^T \varphi(t, x)dt$, $x(t)$ – произвольное решение модели (2).

Ставится задача: найти условия существования векторов $\alpha \in D_0$, $u \in U_0$, определяющих решение $x(t)$ модели (2), удовлетворяющее равенству $x(0) = x(T)$. Такую задачу далее будем называть двухточечной краевой периодической задачей модели (2).

Пусть D_0 – множество объемов производственных фондов экономической системы, U_0 – множество инвестиционных объемов. Экономическая задача ставится так. Найти условия существования начального объема производственных фондов $\alpha_0 \in D_0$, объема инвестиционных вложений $u_0 \in U_0$ таких, чтобы определенное ими решение $x_0(t)$ модели (2) удовлетворяло равенству $x_0(0) = x_0(T)$ и доставляло минимум функционалу (3).

Такую задачу далее будем называть задачей о циклическом развитии экономической системы, а экономическую систему, развитие которой определяется решением $x_0(t)$ модели (2) – экономической системой с циклическим развитием.

Замечание. Для краткости записей вместо слов «начальный объем производственных фондов» будем писать «начальный объем», вместо слов «объем инвестиционных фондов» – «инвестиционный объем».

Пусть $\alpha \in D_0$, $u \in U_0$. Для того чтобы решение $x(t)$ модели (2), определенное векторами α и u, было решением двухточечной краевой периодической задачи на множестве $D_0 \times U_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x(0) = x(T)$, или все равно что

$$x(T) = X(T)\alpha + X(T)\int_0^T X^{-1}(t)[B(t)u + f(t)]dt = \alpha . \tag{4}$$

Тогда, положив $Y = X(T) - E$, $R = X(T)\int_0^T X^{-1}(t)B(t)dt$, $b = -X(T)\int_0^T X^{-1}(t)f(t)dt$, равенство (4) можем записать в виде

$$Y\alpha + Ru = b . \tag{5}$$

Следовательно, векторы α и u тогда и только тогда определяют решение $x(t)$ как решение двухточечной краевой периодической задачи этой модели на множестве $D_0 \times U_0$, когда они удовлетворяют равенству (5).

Рассмотрим следующие случаи.

i_1. Пусть матрица Y невырожденная. Тогда из равенства (5) следует, что

$$\alpha = Y^{-1}(b - Ru) . \tag{6}$$

Равенство (6) определяет отображение φ_1 множества U_0 в пространство E_n. Символом $\varphi_1 U_0$ обозначим образ множества U_0 при отображении φ_1. Если $D_1 = \varphi_1 U_0 \bigcap D_0$ и $D_1 = \varnothing$, $\varnothing$ – пустое множество, то двухточечная краевая периодическая задача модели (2) неразрешима во множестве $D_0 \times U_0$.

Пусть $D_1 \neq \varnothing$. Тогда существует множество $U_1 \subset U_0$, удовлетворяющее равенству $\varphi_1 U_1 = D_1$. Следовательно, для любого $u \in U_1$ существует единственное $\alpha \in D_1$ такое, что выполняется равенство (5), решение $x(t)$ модели (2), определенное векторами α и u, есть решение двухточечной краевой периодической задачи.

Функционал (3), вычисленный на решении $x(t)$, определяет функцию $I_1(u)$, непрерывную на замкнутом и ограниченном множестве U_1, и, следовательно, по теореме Вейерштрасса достигает на этом множестве наименьшего значения в некоторой точке u_0. Тогда, полагая $\alpha_0 = Y^{-1}(b - \ - Ru_0)$, получим, что решение $x_0(t)$ модели (2), определенное векторами α_0 и u_0, доставляет минимум функционалу (3) на множестве $D_0 \times U_0$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Если матрица Y невырожденная и $D_1 \neq \varnothing$, то на множестве $D_0 \times U_0$ двухточечная краевая периодическая задача модели (2) разрешима, во множестве начальных объемов D_0 и множестве инвестиционных объемов U_0 существуют соответственно объемы α_0 и u_0, что определенное ими решение $x_0(t)$ является решением задачи о циклическом развитии экономической системы.

i_2. Пусть матрица R квадратная и неособенная. Тогда равенство (5) можно представить в виде

$$u = R^{-1}(b - Y\alpha) . \tag{7}$$

Равенство (7) определяет отображение φ_2 множества D_0 в пространство E_m. Учитывая, что φ_2 – отображение, обратное относительно отображения φ_1, получим, что справедлива

Теорема 2. Если матрица *R* квадратная и неособенная и $U_1 \neq \varnothing$, то на множестве $D_0 \times U_0$ двухточечная краевая периодическая задача модели (2) разрешима, во множестве начальных объемов D_0 и множестве инвестиционных объемов U_0 существуют соответственно объемы α_0 и u_0, что определенное ими решение $x_0(t)$ является решением задачи о циклическом развитии экономической системы.

i_3. Предположим, что условия пунктов i_1 и i_2 не выполняются. Матрицу *G* определим равенством $G = [Y\ R]$, *G* – $n \times (n+m)$-матрица. Тогда соотношение (5) можно записать так:

$$Gv = b. \tag{8}$$

Пусть $rangG = n$. Для определенности положим, что минор порядка *n*, отличный от нуля, расположен на *k* первых столбцах матрицы *Y* и на *p* первых столбцах матрицы *R*, $k + p = n$. Тогда, полагая *v*=colon(v_1, v_2), v_1 – *n*-мерный вектор, v_2 – *m*-мерный вектор, $G = [G_1\ G_2]$, G_1 – $n \times n$-матрица, $\det G_1 \neq 0$, G_2 – $n \times m$-матрица, получим, что систему (8) можно записать в виде

$$G_1 v_1 + G_2 v_2 = b. \tag{9}$$

Заметим, что

v_1=colon(α_1, α_2, …, α_k, u_1, u_2, …, u_p) = colon($\alpha^{(1)}$, $u^{(1)}$),

$\alpha^{(1)}$ = colon(α_1, α_2, …, α_k), $u^{(1)}$ = colon(u_1, u_2, …, u_p),

v_2=colon(α_{k+1}, α_{k+2}, …, α_n, u_{p+1}, u_{p+2}, …, u_m) = colon($\alpha^{(2)}$, $u^{(2)}$),

$\alpha^{(2)}$ = colon(α_{k+1}, α_{k+2}, …, α_n), $u^{(2)}$ = colon(u_{p+1}, u_{p+2}, …, u_m).

Следовательно, равенство (2) может быть представлено так:

$$v_1 = G_1^{-1}(b - G_2 v_2). \tag{10}$$

Представляя $G_1^{-1}b$, $-G_1^{-1}G_2$ соответственно равенствами $G_1^{-1}b = \text{colon}(b_1, b_2)$, $-G_1^{-1}G_2 = \text{colon}(\mathrm{G}^{(1)}, \mathrm{G}^{(2)})$, в которых b_1 – *k*-мерный, b_2 – $(n-k)$-мерный векторы, $\mathrm{G}^{(1)}$ – $k \times m$, $\mathrm{G}^{(2)}$ – $(n-k) \times m$ -матрицы, получим, что система (10) эквивалентна системе

$$\alpha^{(1)} = \mathrm{G}^{(1)} v_2 + b_1,\ u^{(1)} = \mathrm{G}^{(2)} v_2 + b_2.$$

Полагая $\mathrm{G}^{(1)} = [Q_{11}\ Q_{12}]$, $\mathrm{G}^{(2)} = [Q_{21}\ Q_{22}]$, получим, что

$$\alpha^{(1)} = Q_{11}\alpha^{(2)} + Q_{12}u^{(2)} + b_1, \tag{11}$$

$$u^{(1)} = Q_{21}\alpha^{(2)} + Q_{22}u^{(2)} + b_2.$$

Множество D_0 представим в виде декартова произведения $D^{(1)} \times D^{(2)}$ так, чтобы координатами точек множества $D^{(1)}$ были координаты векторов $\alpha^{(1)}$, координатами точек множества $D^{(2)}$ – координаты векторов $\alpha^{(2)}$, и выполнено включение $\text{colon}(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) \in D_0$. Аналогично множество U_0 представим в виде декартова произведения $U^{(1)} \times U^{(2)}$ так, чтобы координатами точек множества $U^{(1)}$ были координаты векторов $u^{(1)}$, координаты точек множества $U^{(2)}$ – координаты векторов $u^{(2)}$, и выполнено включение colon ($u^{(1)}$, $u^{(2)}$) $\in U_0$.

Введем следующие обозначения: $Y^{(1)} = D^{(1)} \times U^{(1)}$, $Y^{(2)} = D^{(2)} \times U^{(2)}$.

Равенства (11) определяют отображение φ_3 множества $Y^{(2)}$ в пространство E_n. Символом $\varphi_3 Y^{(2)}$ обозначим образ множества $Y^{(2)}$ при отображении φ_3. Пусть множество $Y_0^{(1)}$ таково, что $Y_0^{(1)} = \varphi_3 Y^{(2)} \cap Y^{(1)}$. Тогда, если $Y_0^{(1)} = \varnothing$, то двухточечная краевая периодическая задача модели (2) неразрешима.

Пусть $Y_0^{(1)} \neq \varnothing$, и пусть $Y_0^{(2)}$ – полный прообраз множества $Y_0^{(1)}$, то есть $\varphi_3 Y_0^{(2)} = Y_0^{(1)}$. Тогда для любой точки $v_2 \in Y_0^{(2)}$ существует единственная точка $v_1 \in Y_0^{(1)}$, удовлетворяющая равенству (11). Следовательно, учитывая определение векторов v_1 и v_2, получим, что на множестве $D_0 \times U_0$ существуют векторы $\alpha \in D_0$ и $u \in U_0$ что определенное ими решение $x(t)$ является решением двухточечной краевой периодической задачи модели (2). Вычисленный на решении $x(t)$ функционал (3) представляет собой функцию $I_3(\alpha^{(2)}, u^{(2)})$, непрерывную на замкнутом и ограниченном множестве $Y_0^{(2)}$ и, следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса достигающую на этом множестве наименьшего значения в некоторой точке ($\alpha_0^{(2)}$, $u_0^{(2)}$). Тогда, полагая $\alpha_0 = (Q_{11}\alpha_0^{(2)} + Q_{12}u_0^{(2)} + b_1, \alpha_0^{(2)})$, $u_0 = (Q_{21}\alpha_0^{(2)} + Q_{22}u_0^{(2)} + b_2, u_0^{(2)})$, получим, что решение $x_0(t)$ модели (2), определенное векторами (α_0, u_0), доставляет минимум функционалу на множестве $D_0 \times U_0$.

Итак, справедлива

Теорема 3. Если $rang G = n$ и $Y_0^{(1)} \neq \varnothing$, то на множестве $D_0 \times U_0$ двухточечная краевая периодическая задача модели (2) разрешима, во множестве начальных объемов D_0 и множестве инвестиционных объемов U_0 существуют начальный объем α_0 и инвестиционный объем u_0 соответственно, что определенное ими решение $x_0(t)$ модели (2) является решением задачи о циклическом развитии экономической системы.

i_4. Пусть $rang G = r$, $0 < r < n$. Для простоты рассуждений предположим, что минор порядка *r*, отличный от нуля, расположен в верхнем левом углу матрицы *G*. Элементарными преобразованиями равенство (8) сведем к соотношениям

$$R_1\xi_1 + R_2\xi_2 = b^{(1)}, 0 \sim Cb^{(1)} + b^{(2)}, \tag{12}$$

в котором R_1 – $r \times r$-матрица, $\det R_1 \neq 0$, R_2 – $r \times (n+m-r)$-матрица, ξ_1 – *r*-, ξ_2 – $(n+m-r)$-мерные векторы, C – известная $(n-r)\times r$-матрица. Следовательно, если $Cb^{(1)} + b^{(2)} \neq 0$, то двухточечная краевая периодическая задача неразрешима. Поэтому далее будем предполагать $Cb^{(1)} + b^{(2)} = 0$.

Первое из соотношений (12) представим так:

$$\xi_1 = R_1^{-1}(b^{(1)} - R_2\xi). \tag{13}$$

Для простоты рассуждений положим, что $k + p = r$ и

ξ_1 = colon($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, u_1, u_2, \ldots, u_p$),

ξ_2 = colon($\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_m$).

Введем следующие обозначения:

$\alpha^{(1)} = \mathrm{colon}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $u^{(1)} = \mathrm{colon}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$,

$\alpha^{(2)} = \mathrm{colon}(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n)$, $u^{(2)} = \mathrm{colon}(u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_m)$.

Это значит, что $\xi_1 = \mathrm{colon}(\alpha^{(1)}, u^{(1)})$, $\xi_2 = \mathrm{colon}(\alpha^{(2)}, u^{(2)})$.

Представим $R_1^{-1}b^{(1)}$, $-R_1^{-1}R_2$ соответственно равенствами $R_1^{-1}b^{(1)} = \operatorname{colon}(b_1^{(1)}, b_2^{(1)})$, $-R_1^{-1}R_2 = \operatorname{colon}(R^{(1)}, R^{(2)})$, в которых $b_1^{(1)}$ – k-мерный, $b_2^{(1)}$ – p-мерный векторы, $R^{(1)}$ – $k\times(n+m-r)$-, $R^{(2)}$ – $p\times(n+m-r)$-матрицы, получим, что

$$\alpha^{(1)} = R^{(1)}\xi_1 + b_1^{(1)},\ u^{(1)} = R^{(2)}\xi_2 + b_2^{(1)}.$$

Тогда, заменяя $R^{(1)}$ на G_1, $R^{(2)}$ на $G^{(2)}$, ξ_1 на v_1, ξ_2 на v_2, $b_1^{(1)}$ на b_1, $b_2^{(1)}$ на b_2, повторяя далее рассуждения пункта i_3 и сохраняя обозначения, принятые в нем, приходим к выводу о том, что справедлива

Теорема 4. Если обе матрицы Y и R особенные, или Y особенная, и R не является квадратной, $rangG = r$, $0 < r < n$, $Y_0^{(1)} \neq \varnothing$ и выполнено равенство $Cb^{(1)} + b^{(2)} = 0$, то на множестве $D_0 \times U_0$ двухточечная краевая периодическая задача модели (2) разрешима, во множестве начальных объемов D_0 и множестве инвестиционных объемов U_0 существуют начальный объем α_0 и инвестиционный объем u_0 соответственно, что определенное ими решение $x_0(t)$ модели (2) является решением задачи о циклическом развитии экономической системы.

3. Циклическое развитие экономической системы при наличии уравнений связи

В этом пункте исследование проблемы циклического развития экономической си-стемы (модель (2)) выполним при условии, что начальный объем и объем инвестиций удовлетворяют определенным заранее заданным условиям. В качестве таких условий будем рассматривать равенство (уравнение связи)

$$P\alpha + Qu = q, \tag{14}$$

где P – $s\times n$-, Q – $s\times m$ – постоянные, известные матрицы, q – s-мерный постоянный вектор, $\alpha \in D_0$, $u \in U_0$.

Исследованиями, проведенными в пункте 2, установлено, что модель (2) тогда и только тогда имеет решение двухточечной краевой периодической задачи, когда существует решение $(\alpha, u) \in D_0 \times U_0$ уравнения (5). Следовательно, для того, чтобы модель (2) в условиях равенства (14) имела решение двухточечной краевой периодической задачи, необходимо и достаточно, чтобы система (5) имела решение $(\alpha, u) \in D_0 \times U_0$, которое удовлетворяло бы равенству (14) и определяло бы решение $x_0(t)$ модели (2), доставляющее минимум функционалу (3).

Таким образом, необходимо найти условия разрешимости системы уравнений

$$Y\alpha + Ru = b,\ P\alpha + Qu = q \tag{15}$$

во множестве $D_0 \times U_0$.

Систему (15) запишем в виде

$$[\operatorname{colon}(Y, P)\ \operatorname{colon}(R, Q)]\mu = \operatorname{colon}(b, q), \tag{16}$$

в котором $\mu = \operatorname{colon}(\alpha, u)$.

i_5. Пусть $\operatorname{rang}[\operatorname{colon}(Y, P)\ \operatorname{colon}(R, Q)] = r$, $0 < r \le \min\{n+s, n+m\}$ при $s \neq m$, $0 < r < n+s$ при $s = m$. Для простоты рассуждений предположим, что минор порядка r, не равный нулю, расположен в верхнем левом углу матрицы системы (16). Тогда элементарными преобразованиями систему (16) сведем к выражениям

$$F_1\mu_1 + F_2\mu_2 = q_1,\ 0 \sim Cq_1 + q_2, \tag{17}$$

в которых F_1 – $r \times r$-матрица, $\det F_1 \neq 0$, F_2 – $r \times (n+m-r)$-матрица, C – известная постоянная $(n+s-r) \times r$-матрица, q_1 – r-мерный, q_2 – $(n+s-r)$-мерный векторы.

Следовательно, если $Cq_1 + q_2 \neq 0$, то двухточечная краевая периодическая задача модели (2) неразрешима. Поэтому далее будем предполагать, что $Cq_1 + q_2 = 0$.

Первое из выражений (17) представим в виде

$$\mu_1 = F_1^{-1}(q_1 - F_2\mu_2). \tag{18}$$

Для определенности положим, что

$$\mu_1 = \mathrm{colon}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_\lambda,\ u_1,\ u_2,\ ...,\ u_l),$$
$$\mu_2 = \mathrm{colon}(\alpha_{\lambda+1},\ \alpha_{\lambda+2},\ ...,\ \alpha_n,\ u_{l+1},\ u_{l+2},\ ...,\ u_m),\ \alpha^{(1)} = \mathrm{colon}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\lambda),$$
$$\alpha^{(2)} = \mathrm{colon}(\alpha_{\lambda+1}, \alpha_{\lambda+2},\ ..., \alpha_n),\ \mathrm{colon}(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) \in D_0,\ u^{(1)} = \mathrm{colon}(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_l),$$
$$u^{(2)} = \mathrm{colon}(u_{l+1}, u_{l+2},\ ...,\ u_m),\ \mathrm{colon}(u^{(1)}, u^{(2)}) \in U_0.$$

Множество M_1 определим равенством $M_1 = \{\mu_1\}$, множество M_2 – равенством $M_2 = \{\mu_2\}$.

Равенство (18) определяет преобразование φ_5 множества M_2 в пространство E_r. Символом $\varphi_5 M_2$ обозначим образ множества M_2 при отображении φ_5. Пусть $M_{11} = \varphi_5 M_2 \bigcap M_1$. Если $M_{11} = \varnothing$, то двухточечная краевая периодическая задача модели (2) не имеет решения на множестве $D_0 \times U_0$.

Предположим, что $M_{11} \neq \varnothing$. Тогда, обозначая символом M_{21} прообраз множества M_{11} при отображении φ_5 и учитывая, что $M_{11} \subseteq M_1$, $M_{21} \subseteq M_2$, получим, что для любой точки $\mu_2 \in M_{21}$ существует единственная точка $\mu_1 \in M_{11}$, удовлетворяющая равенству (18). Это означает, что на множестве $D_0 \times U_0$ двухточечная краевая периодическая задача разрешима.

Функционал (3), вычисленный на решении $x(t)$, определенном вектором $\mu_2 \in M_{21}$ и, следовательно, вектором $\mu_1 \in M_{11}$, представляет собой функцию $I_5(\mu_2)$, непрерывную на замкнутом, ограниченном множестве M_{21}. Тогда в силу теоремы Вейерштрасса существует точка $\mu_2^{(0)} \in M_{21}$, в которой функция $I_5(\mu_2)$ достигает наименьшего значения на этом множестве. Следовательно, полагая $\mu_1^{(0)} = F_1^{-1}(q_1 - F_2\mu_2^{(0)})$ и учитывая зависимость вектора (μ_1, μ_2) от вектора $(\alpha,\ u)$, получим, что векторы $\mu_1^{(0)}$, $\mu_2^{(0)}$ определяют точку $(\alpha_0,\ u_0) \in D_0 \times U_0$ такую, что решение $x_0(t)$ модели (2), определяемое векторами α_0, u_0 доставляет минимум функционалу (3).

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Если $\mathrm{rang}[\mathrm{colon}(Y,P)\,\mathrm{colon}(R,Q)] = r$, $0 < r \leq \min\{n+s,\ n+m\}$ при $s \neq m$, $0 < r < n+s$ при $s = m$, $Cq_1 + q_2 = 0$ и $M_{11} \neq \varnothing$, то на множестве $D_0 \times U_0$ двухточечная краевая периодическая задача модели (2) в условиях уравнений связи разрешима, во множестве начальных объемов D_0 и множестве объемов инвестиций U_0 существуют соответственно объемы α_0 и u_0, что определенное ими решение $x_0(t)$ является решением задачи о циклическом развитии экономической системы (модель (2)) в условиях уравнений связи.

i_6. Пусть $s = m$, $\det[\mathrm{colon}(Y,P)\,\mathrm{colon}(R,Q)] \neq 0$. Матрицы V и W определим соответственно равенствами $\mathrm{V} = \mathrm{colon}(Y,P)$, $\mathrm{W} = \mathrm{colon}(R,Q)$. Тогда система (15) примет вид

$$V\alpha + Wu = d, \tag{19}$$

где $\mathrm{d} = \mathrm{colon}(b, q)$. Полагая $\mathrm{S} = [V\,W]$, получим, что равенство (19) можно представить так:

$$S\xi = d\,, \tag{20}$$

$\xi = \mathrm{colon}(\alpha, u)$, S – $(n+m)\times(n+m)$-матрица, $\det S \neq 0$. Следовательно, $\xi = S^{-1}d$ – единственное решение уравнения (20), которое обозначим как $\xi_0 = \mathrm{colon}(\alpha_0, u_0)$.

Представив матрицу S^{-1} в виде $S^{-1} = \mathrm{colon}(S_1, S_2)$, где S_1 $-n\times(n+m)$-, S_2 – $m\times(n+m)$-матрицы, равенство (20) можно записать так: $\alpha_0 = S_1 d$, $u_0 = S_2 d$. Следовательно, если точка $(\alpha_0, u_0) \notin D_0 \times U_0$, то система (19) неразрешима во множестве $D_0 \times U_0$, а значит и двухточечная краевая периодическая задача модели (2) неразрешима на этом множестве.

Таким образом, справедлива

Теорема 6. Пусть $s = m$, $\det[\mathrm{colon}(Y, P)\,\mathrm{colon}(R, Q)] \neq 0$. Тогда, если точка $(\alpha_0, u_0) \in D_0 \times U_0$, то двухточечная краевая периодическая задача модели (2) в условиях уравнений связи разрешима, решение $x_0(t)$ модели (2), определенное векторами α_0 и u_0, доставляет минимум функционалу (3) и, следовательно, является решением задачи о циклическом развитии экономической системы (модель (2)).

4. Численное исследование математической модели развития экономической системы при наличии уравнений связи

Предположим, что развитие трехсекторной экономической системы определяется моделью

$$\dot{x} = Bu\,, \tag{21}$$

в котором $\mathrm{B} = [\mathrm{colon}(1,\ 2,\ 4)\,\mathrm{colon}(1,\ 2,\ 4)]$, уравнения связи задаются равенствами

$$\begin{gathered}\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 6u_1 + 4u_2 = 2\,,\\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 6u_1 + 3u_2 = 0\,.\end{gathered} \tag{22}$$

Пусть $D_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : 0 \le \alpha_1 \le 1{,}0 \le \alpha_2 \le 2, |\alpha_3| \le 5\}$, $U_0 = \{u \in E_2 : |u| \le 8\}$. Для оценивания эффективности развития экономической системы в условиях уравнений (22) рассмотрим функционал

$$I = \int_0^1 x^T C(t) x dt\,, \tag{23}$$

где $\mathrm{C}(t) = [\mathrm{colon}(4\mathrm{t},\ 0,\ 0)\,\mathrm{colon}(0,\ 6t,\ 0)\,\mathrm{colon}(0,\ 0,\ 2t)]$.

Решение модели (21) имеет вид

$$\begin{gathered}x_1 = \alpha_1 + tu_1 + tu_2\,,\\ x_2 = \alpha_2 + 2tu_1 + 2tu_2\,,\\ x_3 = \alpha_3 + 4tu_1 + 4tu_2\,.\end{gathered}$$

Учитывая, что ищутся условия существования решения $x_0(t)$ модели (21), определяющего циклическое развитие экономической системы, получим, что должны быть, по крайней мере, выполнены равенства $x_1(0) = x_1(1)$, $x_2(0) = x_2(1)$, $x_3(0) = x_3(1)$. Это означает, что при наличии уравнений связи необходимо найти условие разрешимости системы

$$\begin{gathered}\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 6u_1 + 4u_2 = 2\,,\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 6u_1 + 4u_2 = 2\,,\end{gathered}$$

$$u_1 + u_2 = 0,\qquad (24)$$
$$2u_1 + 2u_2 = 0,$$
$$4u_1 + 4u_2 = 0.$$

Непосредственным вычислением устанавливаем, что система (24) тогда и только тогда имеет решение, когда имеет решение система

$$\alpha_3 + 2u_1 = 2 - \alpha_1 - 2\alpha_2,$$
$$2\alpha_3 + 3u_1 = 2 - 2\alpha_1 - \alpha_2,$$

решением которой является

$$\alpha_3 = -6 - \alpha_1 + 4\alpha_2,\ u_1 = 4 - 3\alpha_2. \qquad (25)$$

Множество M_1 определим равенством

$$M_1 = \{(\alpha_3, u_1) : |\alpha_3| \le 15, |u_1| \le 10\},$$

множество M_2 – равенством

$$M_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) : 0 \le \alpha_1 \le 1, 0 \le \alpha_2 \le 2\}.$$

Поскольку $|\alpha_3| \le 15$, $|u_1| \le 10$, то любая точка $(\alpha_1, \alpha_2) \in M_2$ преобразованием, определенным равенствами (25), отображается в точку $(\alpha_3, u_1) \in M_1$, то есть двухточечная краевая периодическая задача модели (21) разрешима на множестве $D_0 \times U_0$. Решение модели (21), согласно равенствам (25), может быть записано так:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = -6 - \alpha_1 + 4\alpha_2. \qquad (26)$$

Непосредственным вычислением получаем, что на решении (26) функционал (22) определяется равенством

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = 36 + 3\alpha_1^2 + 16\alpha_2^2 + 12\alpha_1 - 48\alpha_2 - 8\alpha_1\alpha_2$$

и, следовательно, является непрерывной функцией на множестве M_2.

Методом абсолютного и условного экстремумов устанавливаем, что наименьшее значение, равное 11, функционал (23) на множестве M_2 принимает в точке $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ на решении $x_0(t)$ модели (21), определенном равенствами $x_{01} = 1$, $x_{02} = 2$, $x_{03} = 1$, которое и будет решением задачи о циклическом развитии экономической системы (модель (2)).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замков, О.О. Математические модели в экономике [Текст] : учеб. / О.О. Замков, Ю.А. Черемных, А.В. Толстопятенко. – М. : Дело и сервис, 1999. – 368 с.
2. Колемаев, В.А. Математическая экономика [Текст] : учеб. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
3. Красс, М.С. Математические методы и модели для магистрантов экономики [Текст] : учеб. / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2006. – 496 с.
4. Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика [Текст] : моногр. – М. : Мир, 1972. – 514 с.
5. Терёхин, М.Т. Математическая модель многоотраслевой экономической системы с функционалом издержек [Текст] // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2017. – № 3. – С. 115–118.
6. Терёхин, М.Т. Двухточечная краевая задача управляемой математической модели стабильного развития экономической системы в условиях внешних воздействий [Текст] // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2015. – № 3. – С. 71–76.

REFERENCES

1. Zamkov, O.O. Matematicheskie modeli v ehkonomike [Text] : ucheb. / O.O. Zamkov, Yu.A. Cheremnyh, A.V. Tolstopyatenko. – M. : Delo i servis, 1999. – 368 s.
2. Kolemaev, V.A. Matematicheskaya ehkonomika [Text] : ucheb. – M. : YUNITI, 1998. – 240 s.
3. Krass, M.S. Matematicheskie metody i modeli dlya magistrantov ehkonomiki [Text] : ucheb. / M.S. Krass, B.P. Chuprynov. – SPb. : Piter, 2006. – 496 s.
4. Nikajdo, H. Vypuklye struktury i matematicheskaya ehkonomika [Text] : monogr. – M. : Mir, 1972. – 514 s.
5. Teryohin, M.T. Matematicheskaya model' mnogootraslevoj ehkonomicheskoj sistemy s funkcionalom izderzhek [Text] // Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta. – 2017. – N 3. – S. 115–118.
6. Teryohin, M.T. Dvuhtochechnaya kraevaya zadacha upravlyaemoj matematicheskoj modeli stabil'nogo razvitiya ehkonomicheskoj sistemy v usloviyah vneshnih vozdejstvij [Text] // Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta. – 2015. – N 3. – S. 71–76.

M.T. Terekhin, K.O. Politov

MATHEMATICAL MODELING OF AN ECONOMIC SYSTEM CYCLIC DEVELOPMENT WITH COUPLING EQUATIONS

To establish an economic system (an enterprise), one should solve problems connected with its structure, management methods, financial provision, monitoring, outer impact, predictability of results, and other issues associated with an economic system. To solve the issues and to ensure its viability potential, one should employ mathematical methods. The main method is mathematical modeling, which consists in creating and investigating a mathematical model which describes the economic system and its development.

vectorial function, financial establishments, minor, image, qualifier, production assets, preimage, rank, governance, fundamental matrix, functional.