

УДК 513

**Б.С. Кирьяков**

**ПИРАМИДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ  
И ЕГО СВОЙСТВА**

Рассмотрены свойства распределения, описывающего положение точек в решетчатой многомерной пирамиде. Прослежена связь этого распределения, названного пирамидальным, с выборками из статистического веса, характерного для статистики Бозе – Эйнштейна. Свойства пирамидального распределения (начальные и центральные моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса) записаны в виде, универсальном для гипергеометрического, отрицательного гипергеометрического, биномиального, равномерного и других распределений. Отмечена возможность использования пирамидального распределения для сложения распределений и моделирования реальных процессов.

*решетчатая пирамида, распределение точек, статистика Бозе – Эйнштейна, выборки из статистического веса, распределения (пирамидальное, гипергеометрическое, отрицательное гипергеометрическое, биномиальное, равномерное), начальные и центральные моменты, коэффициенты асимметрии и эксцесса, универсальный вид, сложение распределений, практическое использование.*

Распределения трехпараметрического вида, к которым относятся, например, обычное и отрицательное гипергеометрические распределения, хорошо известны в математической статистике и ее приложениях. К числу трехпараметрических можно отнести и распределение вида [5]:

$$f(x_i) = \frac{1}{C_{m+n}^m} C_{x_i+n-i}^{x_i} C_{m-x_i+i-1}^{m-x_i}. \quad (1)$$

Оно интересно тем, что описывает расположение точек вдоль оси  $0x_i$  в решетчатой пирамиде, целочисленные координаты точек которой связаны ограничениями:

$$m \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_i \geq \dots x_n \geq 0, \quad (2)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  – размерность пирамиды,  $m = 1, 2, 3, \dots$  – длина ребра пирамиды (длина ребра  $n$ -мерного решетчатого куба, которому пирамида принадлежит).

Общее число точек  $G$  в такой пирамиде определяется в выражении (1) первым сомножителем

$$G = C_{m+n}^m = \frac{(m+n)!}{m!n!}, \quad (3)$$

при этом произведение двух других сомножителей задает число точек в сечениях пирамиды с фиксированными значениями  $x_i = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Отмеченные особенности иллюстрирует решетчатая пирамида, принадлежащая трехмерному ( $n = 3$ ) кубу с ребром  $m = 4$  (рис. 1а). Общее число точек в ней  $G = 35$ , а их распределение вдоль оси  $0x_2$  определяется согласно выражению (1) рядом 1·5, 2·4, 3·3, 4·2, 5·1. В этом нетрудно убедиться, если число точек в отдельно взятых сечениях суммировать по рядам, выделенным на рисунке 1а.

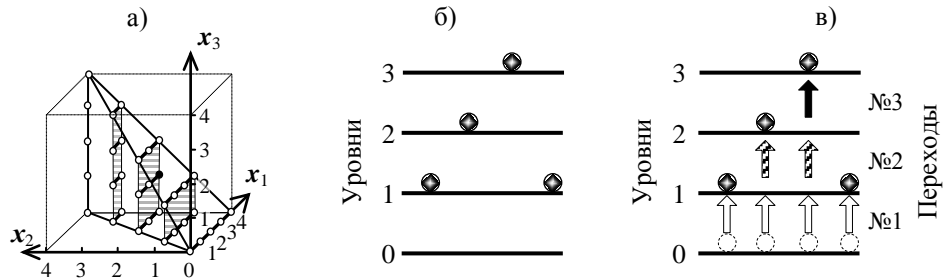


Рис. 1

В соответствии с этим распределение (1) удобно называть пирамидальным и обозначать в виде, который подчеркивает его связь с решетчатыми пирамидами:

$$\pi(x_i, m, i, n) = \frac{1}{C_{m+n}^m} C_{x_i+n-i}^{x_i} C_{m-x_i+i-1}^{m-x_i}. \quad (4)$$

В статистическом отношении интерес к пирамидальным распределениям оправдан тем, что решетчатые пирамиды, удовлетворяющие ограничениям (1), являются геометрическим образом статистического веса, характерного для статистики Бозе – Эйнштейна. Отмеченную особенность иллюстрируют диаграммы на рисунках 1б и 1в.

Диаграмма на рисунке 1б отображает один из способов размещения четырех тождественных неразличимых частиц по четырем уровням с нумерацией 0, 1, 2, 3 при отсутствии каких бы то ни было запретов, что характерно для статистики Бозе – Эйнштейна. Представленное на рисунке 1б размещение частиц можно пронумеровать, предположив, что вначале (рис. 1в) частицы находились на нулевом уровне, а их размещение по уровням произошло в результате серии переходов с нулевого уровня на вышестоящие со строгой очередностью следования: сначала переход № 1, после чего переход № 2 и лишь затем переход № 3. Сосчитав по горизонтали стрелки, отображающие на рисунке 1в переходы частиц, диаграмме на рисунке 1б можно поставить в соответствие целочисленную комбинацию  $x_1, x_2, x_3 = 4, 2, 1$ . В этой комбинации  $x_1$  задает число переходов с № 1,  $x_2$  – число переходов с № 2, а  $x_3$  – число переходов с № 3. Целесообразность подобной нумерации диаграммы определяется тем, что для тождественных и неразличимых частиц между диаграммой, отображающей размещение частиц по уровням, и ее нумерацией существует взаимное и однозначное соответствие. По заданной нумерации  $x_1, x_2, x_3$  можно построить саму диаграмму, а по диаграмме известного вида – записать ее нумерацию.

По рисунку 1в нетрудно понять, что в силу строгой очередности переходов значения  $x_1, x_2$  и  $x_3$  удовлетворяют ограничениям:

$$4 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0. \quad (5)$$

Эти ограничения означают, что комбинации  $x_1, x_2, x_3$ , характеризующие возможные размещения четырех тождественных неразличимых частиц по четырем уровням, будут задаваться координатами точек трехмерной решетчатой пирамиды с ребром, равным 4 (рис. 1а). В этой пирамиде диаграмма, приведенная на рисунке 1б, отображается точкой с координатами  $x_1, x_2, x_3 = 4, 2, 1$ . На рисунке 1а она выделена темной штриховкой. Что касается общего числа точек в пирамиде, то оно будет равно числу возможных размещений четырех частиц по четырем уровням. При отсутствии запретов на размещение частиц это число должно определяться статистическим весом, характерным для статистики Бозе – Эйнштейна:

$$G = C_{m+z-1}^m = \frac{(m+z-1)!}{m!(z-1)!}, \quad (6)$$

где  $z$  – число уровней, по которым происходит размещение  $m$  частиц.

В общем случае, когда речь идет о размещении  $m$  тождественных неразличимых частиц по  $z$  уровням, пронумерованным в виде  $0, 1, 2, \dots, n$ , число последовательных переходов между уровнями  $n = z - 1$ . При этом нумерация возможных размещений частиц  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$  будет определяться целочисленными координатами точек решетчатой  $n$ -мерной пирамиды с ребром  $m$ . Координаты этих точек будут удовлетворять ограничениям (2), а их общее число в соответствии с выражением (6) будет определяться соотношением (3), что позволяет рассматривать решетчатые пирамиды в качестве геометрического образа статистического веса, характерного для статистики Бозе – Эйнштейна. В соответствии с этим распределение  $\pi(x_i, m, i, n)$  будет описывать свойства выборок из этого веса, что предопределяет значимость изучения его свойств.

Следует отметить, что взаимосвязь распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$  с решетчатыми пирамидами в значительной степени облегчает изучение его свойств. В простейшем случае это изучение можно провести в

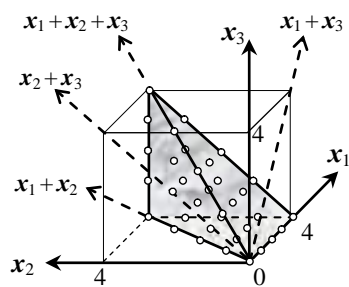


Рис. 2

численном виде, используя в качестве предметной базы таблицу с координатами точек соответствующей пирамиды. В дополнение к этому отмеченная взаимосвязь создает условия для решения задач, связанных со сложением распределений  $\pi(x_i, m, i, n)$ . Указанную возможность иллюстрирует рисунок 2 на примере трехмерной ( $n = 3$ ) решетчатой пирамиды с ребром  $m = 4$ , в которой размещение точек вдоль осей  $0x_i$  описывается распределениями  $\pi(x_i, m, i, n)$  при  $n =$

3,  $m = 4$  и  $i = 1, 2, 3$ . Одновременно с этим данная пирамида описывает и результаты их сложения. Искомые распределения  $f(x_1 + x_2)$ ,  $f(x_1 + x_3)$ ,  $f(x_2 + x_3)$  и  $f(x_1 + x_2 + x_3)$  будут определяться размещением точек пирамиды вдоль направлений, которые выделены в кубе на рисунке 2 пунктирными стрелками. Особенность подобного сложения состоит в том, что оно соответствует определенной корреляционной взаимосвязи координат точек, определяемой их расположением в решетчатой пирамиде.

В простейшем случае распределения  $f(x_1 + x_2)$ ,  $f(x_1 + x_3)$ ,  $f(x_2 + x_3)$  и  $f(x_1 + x_2 + x_3)$  нетрудно найти по таблице с координатами точек рассматриваемой пирамиды. По этой таблице можно также найти  $f(x_1 - x_2)$  и  $f(x_2 - x_3)$ , которые характеризуют распределение точек пирамиды по убыли значений  $x_i$  с ростом номера  $i$ . Следует лишь выстроить точки пирамиды в зависимости от значений  $x_1 + x_2$ ,  $x_1 + x_3$ ,  $x_2 + x_3$ ,  $x_1 + x_2 + x_3$ ,  $x_1 - x_2$  и  $x_2 - x_3$ . Подобная таблица также создает условия для расчета корреляционной матрицы и матрицы дисперсии, а также других характеристик складываемых распределений.

Например, для случая, изображенного на рисунке 2, распределение точек пирамиды по выделенным направлениям описывается данными, приведенными в таблице 1. Кроме рядов, характеризующих вид самих складываемых распределений  $\pi(x_i, m, i, n)$ , в таблице 1 приведены ряды, характерные для распределений  $f(x_1 + x_2)$ ,  $f(x_1 + x_3)$ ,  $f(x_2 + x_3)$ ,  $f(x_1 + x_2 + x_3)$ ,  $f(x_1 - x_2)$  и  $f(x_2 - x_3)$ , а также матрица  $r_{ij}^2$ , описывающая корреляционную взаимосвязь между координатами точек пирамиды  $x_i$  и  $x_j$ .

Анализируя данные таблицы 1, нетрудно прийти к выводу, что решетчатые пирамиды обладают весьма простыми свойствами, которые проявляются уже в рассматриваемом элементарном случае. К числу примечательных особенностей, которые прослеживаются по таблице 1, можно отнести, например, симметрию распределений  $f(x_1)$  и  $f(x_3)$ . Корреляционная матрица  $r_{ij}$  также отличается высокой симметрией, поскольку симметрична относительно обеих диагоналей. Такой же симметрией характеризуется и матрица дисперсии. Если обратиться к решетчатым пирамидам с другими значениями  $n$  и  $m$ , то можно обнаружить, что элементы матрицы  $r_{ij}$  не зависят от  $m$ . Значения этих элементов определяются лишь их положением в матрице и ее размерами, зависящими от  $n$ . Интерес представляет и равенство распределений  $f(x_1 - x_2) = f(x_2 - x_3)$ , которое можно рассматривать в качестве статистического свидетельства линейности тех изменений, которые претерпевает распределение  $\pi(x_i, m, i, n)$  с ростом  $i$ .

Таблица 1

Распределение точек в пирамиде (рис. 2) по разным направлениям

Распределение	Ряд	Корреляция
$f(x_1)$	1,3,6, 10, 15	$r_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$
$f(x_2)$	5, 8, 9, 8, 5	
$f(x_3)$	15, 10, 6, 3, 1	
$f(x_1+x_2)$	1, 1, 3, 3, 6, 5, 7, 4, 5	
$f(x_1+x_3)$	1, 2, 4, 6, 9, 6, 4, 2, 1	
$f(x_2+x_3)$	5, 4, 7, 5, 6, 3, 3, 1, 1	
$f(x_1+x_2+x_3)$	1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1	
$f(x_1-x_2)$	15, 10, 6, 3, 1	
$f(x_2-x_3)$	15, 10, 6, 3, 1	

Согласно отмеченным особенностям, пирамидальное распределение относится к числу объектов, весьма удобных для изучения. Подобное изучение целесообразно провести в соотношении со свойствами других распределений одно-, двух- и трехпараметрического вида, что позволит выявить место пирамидального распределения среди таких распределений.

В настоящей работе мы остановимся лишь на свойствах и характеристиках самого распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$ . Вопросы, связанные с взаимосвязью и сложением пирамидальных распределений, заслуживают отдельного рассмотрения.

Говоря о свойствах пирамидального распределения,  $\pi(x_i, m, i, n)$ , в первую очередь следует остановиться на аналитическом виде выражения (4). Этот вид непосредственно определяется соотношением (3), которое, с одной стороны, задает общее число точек в  $n$ -мерной решетчатой пирамиде с ребром  $m$ , а с другой – является формой записи статистического веса (6), характерного для статистики Бозе – Эйнштейна. Для вывода выражения (4) достаточно рассмотреть сечение пирамиды с фиксированным значением  $x_i = a$ . Координаты его точек удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{cases} m \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{i-1} \geq x_i \geq x_{i+1} \geq x_{i+2} \geq \dots \geq x_n \geq 0, \\ x_i = a, \end{cases} \quad (7)$$

где  $a = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Заданное значение  $x_i = a$  интересно тем, что разбивает ограничения, записанные в первой строке соотношений (7), на два независимых участка, каждый из которых удовлетворяет собственным ограничениям:

$$m \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{i-1} \geq a, \quad (8)$$

$$a \geq x_{i+1} \geq x_{i+2} \geq \dots \geq x_n \geq 0. \quad (9)$$

Если обратиться к геометрическим представлениям, то ограничения (8) и (9) можно соотнести с некоторыми решетчатыми пирамидами. Например, для

участка, удовлетворяющего ограничениям (8), размерность такой пирамиды  $n'$  и длина ее ребра  $m'$  равны:

$$n' = i - 1, \quad (10)$$

$$m' = m - a. \quad (11)$$

Особенность данной пирамиды заключается в том, что она начинается с точки, координаты которой  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1} = a, a, \dots, a$ . По понятным причинам эта особенность не будет сказываться на общем числе ее точек  $\Delta G'$ :

$$\Delta G' = C_{m'+n'}^{m'}. \quad (12)$$

Что касается участка, удовлетворяющего ограничениям (9), то для него размерность  $n''$  и длина ребра  $m''$  соответствующей пирамиды равны:

$$n'' = n - i, \quad (13)$$

$$m'' = a. \quad (14)$$

Согласно выражению (3), число точек в такой пирамиде будет равно

$$\Delta G'' = C_{m''+n''}^{m''}. \quad (15)$$

Если учесть независимость целочисленных комбинаций  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  и  $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ , то число комбинаций вида  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ , удовлетворяющих условиям (7), а соответственно и число точек в сечении решетчатой пирамиды при  $x_i = a$ , будет равно произведению

$$\Delta G = \Delta G' \cdot \Delta G''. \quad (16)$$

Заменяя заданное значение  $x_i = a$  на текущие значения  $x_i = 0, 1, 2, \dots, m$ , нетрудно получить из соотношений (11) – (16) выражение для распределения точек вдоль оси  $Ox_i$  в  $n$ -мерной решетчатой пирамиде с ребром  $m$ . Если это выражение нормировать, используя равенство (3), то оно примет вид, определяющий распределение  $\pi(x_i, m, i, n)$  (4). Это лишний раз подчеркивает связь распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$  и с решетчатыми пирамидами, и со статистическим весом, характерным для статистики Бозе – Эйнштейна.

Если обратиться к свойствам пирамидального распределения (4), то они определяются алгебраическими выражениями достаточно простого вида. Например, зависимость начальных моментов этого распределения от параметров  $m, i$  и  $n$  описывается выражениями, приведенными в таблице 2. Получить выражения (2.1) – (2.4) можно, исходя из того, что для распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$  (4) начальный момент  $l$ -го порядка при некоторых значениях  $m$  и  $n$  можно выразить через начальный момент  $(l - 1)$ -го порядка этого же распределения, но при других значениях  $m'$  и  $n'$ . Отмеченную особенность проще всего продемонстрировать на примере момента 1-го порядка (2.1), который выражается через момент 0-го порядка:

$$\begin{aligned}\bar{x}_i &= \sum_{x_i=0}^m x_i \pi(x_i, m, i, n) = \frac{1}{C_{n+m}^m} \cdot \sum_{x_i=0}^m x_i \frac{[x_i + (n-i)]!}{(n-i)! \cdot x_i!} \cdot \frac{[(m-x_i) + (i-1)]!}{(i-1)! \cdot (m-x_i)!} = \\ &= \frac{C_{n+m}^{m'} (n'-i)!}{C_{n+m}^m (n-i)!} \cdot \sum_{x_i'=0}^{m'} \frac{1}{C_{n'+m'}^{m'}} \cdot \frac{[x_i' + (n'-i)]!}{(n'-i)! \cdot x_i'!} \cdot \frac{[(m'-x_i') + (i-1)]!}{(i-1)! \cdot (m'-x_i')!} = \\ &= \frac{C_{n'+m'}^{m'} (n'-i)!}{C_{n+m}^m (n-i)!} \cdot \sum_{x_i'=0}^{m'} \frac{1}{C_{n'+m'}^{m'}} C_{x_i'+n'-i}^{x_i'} C_{m'-x_i'+i-1}^{m'-x_i'} = \frac{C_{n'+m'}^{m'} (n'-i)!}{C_{n+m}^m (n-i)!} = \\ &= \frac{[(n+1) + (m-1)]!}{(n+1)! \cdot (m-1)!} \cdot \frac{n! \cdot m!}{(n+m)!} \cdot \frac{(n+1-i)!}{(n-i)!} = m \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right),\end{aligned}$$

где  $n' = n + 1$ ,  $m' = m - 1$ ,  $x_i' = x_i - 1 = 0, 1, \dots, m'$ .

Таблица 2

Начальные моменты 1-го, 2-го, 3-го и 4-го порядка  
для распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$

$\bar{x}_i = m \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right)$	(2.1)
$\bar{x}_i^2 = m \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{i}{n+2} \right) (m-1) \right]$	(2.2)
$\bar{x}_i^3 = m \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right) \left\{ 1 + \left( 1 - \frac{i}{n+2} \right) (m-1) \cdot \left[ 3 + \left( 1 - \frac{i}{n+3} \right) (m-2) \right] \right\}$	(2.3)
$\bar{x}_i^4 = m \left( 1 - \frac{i}{n+1} \right) \left\{ \left[ 1 + \left( 1 - \frac{i}{n+2} \right) (m-1) \right] \left[ 7 + \left( 1 - \frac{i}{n+3} \right) (m-2) \right] \left\{ 6 + \left( 1 - \frac{i}{n+4} \right) (m-3) \right\} \right\}$	(2.4)

Аналогичным образом можно доказать справедливость других выражений в таблице 2. Более компактно их можно записать в виде

$$\bar{x}_i^l = \sum_{q=1}^l a_{lq} \frac{(n+q-i)! \cdot n! \cdot m!}{(n-i)! \cdot (n+q)! \cdot (m-q)!}, \quad (17)$$

где  $a_{lq}$  – некоторые коэффициенты,  $q = 1, 2, 3, \dots, l$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots, m$ .

В справедливости выражения (17) нетрудно убедиться. Для этого достаточно раскрыть в соотношениях (2.1) – (2.4) скобки и привести подобные. Значения коэффициентов  $a_{lq}$ , найденные для восьми первых начальных моментов ( $l = 1, 2, 3, \dots, 8$ ), приведены в таблице 3.

По таблице 3 можно проследить одно из ее свойств:

$$a_{lq} = a_{l-1, q-1} + q \cdot a_{l-1, q}. \quad (18)$$

При символической записи (см. табл. 3) оно означает

$$\diamond = \nabla + \circ \times \square,$$

что позволяет распространить таблицу 3 на диапазон более высоких значений  $l$  и  $q$ . Возможность подобного расширения таблицы 2 подтверждается непосредственными расчетами. Справедливость выражений (17) и (18) была проверена вплоть до момента с порядком  $l = 22$ , что заведомо превышает большую часть практических потребностей.

Таблица 3

Значения коэффициентов  $a_{lq}$  для 8-ми первых начальных моментов

$l$	$q$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0
5	1	15	45	10	1	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0
7	1	63	301	350	140	21	0	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

В дополнение к этому выражение (18) совпадает с рекуррентной формулой, характерной для чисел Стирлинга (второго рода) [2, с. 678–679], что позволяет отождествить коэффициенты в таблице 2 с этими числами, по крайней мере при значениях  $l \leq 22$ .

По таблице 2, используя известную связь начальных и центральных моментов, нетрудно найти выражения для зависимости центральных моментов пирамидального распределения от  $m$ ,  $n$  и  $i$  (табл. 4).

Выражения, приведенные в таблицах 2 и 4, достаточно громоздки. Более компактно их можно записать, если использовать в качестве независимых параметров значения  $p$ ,  $r$  и  $m$ , которые определяются модулем [4]:

$$\begin{cases} p = \frac{\bar{x}}{m}, \\ r = \frac{1}{m-1} \left( \frac{\sigma_x^2}{mpq} - 1 \right), \\ m, \end{cases} \quad (19)$$

где  $q = 1 - p$ .



Таблица 4

Центральные моменты для распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$

$\mu_2 = \overline{(x_i - \bar{x}_i)^2} = \frac{m(n+m+1)}{n+2} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{i}{n+1}$	(4.1)
$\mu_3 = \overline{(x_i - \bar{x}_i)^3} = \frac{m(n+m+1)(n+2m+1)}{(n+2)(n+3)} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{i}{n+1} \left(\frac{2i}{n+1} - 1\right)$	(4.2)
$\mu_4 = \overline{(x_i - \bar{x}_i)^4} = \frac{m(n+m+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{i}{n+1} \times$ $\times \left\{ n(n+1) + 3m(n+m+1) \left[ 2 + (n-5) \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \frac{i}{n+1} \right] - 6(n+1-i)i \right\}$	(4.3)

По таблицам 2 и 4 и выражениям (19) для пирамидального распределения нетрудно найти взаимосвязь параметров  $r$  и  $p$  с параметрами  $i$  и  $n$ :

$$p = 1 - \frac{i}{n+1}, \quad (20)$$

$$r = \frac{1}{n+2}. \quad (21)$$

Используя эти соотношения и данные таблиц 2 и 4, можно выразить другие характеристики распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$  – дисперсию  $\sigma^2$ , коэффициенты асимметрии  $\alpha$  и эксцесса  $\iota$  в зависимости от  $m, r, p$  (табл. 5). Для краткой записи соответствующих выражений в таблице 5 использован еще и параметр  $q = 1 - p$ .

В таблице 5 проведено сравнение распределения (4) с гипергеометрическим распределением. В обозначениях, использованных в выражении (4), гипергеометрическое распределение можно записать в похожем виде:

$$h(x, m, i, n) = \frac{1}{C_n^m} C_i^x C_{n-i}^{m-x}. \quad (22)$$

Видно, что распределение  $h(x, m, i, n)$  также является трехпараметрическим с параметрами  $m, i$  и  $n$ . Обратившись к его свойствам [1, с. 119–121] для распределения  $h(x, m, i, n)$ , как и для распределения  $\pi(x_i, m, i, n)$ , можно найти параметры модуля (19), а затем выразить начальные и центральные моменты, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса в зависимости от  $m, r, p$  и  $q$  (где  $q = 1 - p$ ). Отличительная особенность полученных таким образом выражений будет состоять в том, что они совпадут с аналогичными выражениями, характерными для пирамидального распределения. Для удобства в пирамидальном распределении целесообразно опустить индекс  $i$  для переменной  $x_i$ , что и сделано в таблице 5.

Таблица 5

Свойства пирамидального и гипергеометрического распределений

Характеристики	Распределения	
	пирамидальное	гипергеометрическое
Характеристики	$\pi(x, m, i, n) = \frac{1}{C_{m+n}^n} C_{x+n-i}^x C_{m-x+i-1}^{m-x} \quad (4.1)$	$h(x, m, i, n) = \frac{1}{C_n^m} C_i^x C_{n-i}^{m-x} \quad (5.2)$
Взаимосвязь параметров	$\begin{cases} p = 1 - \frac{i}{n+1} \\ r = \frac{1}{n+2} \end{cases} \quad (5.3) \quad \begin{cases} n = \frac{1-2r}{r} \\ i = (1-p) \frac{1-r}{r} \end{cases} \quad (5.4)$	$\begin{cases} p = \frac{i}{n} \\ r = -\frac{1}{n-1} \end{cases} \quad (5.5) \quad \begin{cases} n = \frac{r-1}{r} \\ i = p \frac{r-1}{r} \end{cases} \quad (5.6)$
Начальные моменты	$\bar{x} = mp \quad (5.7)$	
	$\overline{x^2} = mp\{1 + [1 - q(1-r)](m-1)\} \quad (5.8)$	
	$\overline{x^3} = mp \left\{ 1 + [1 - q(1-r)](m-1) \left[ 3 + \left( 1 - q \frac{1-r}{1+r} \right) (m-2) \right] \right\} \quad (5.9)$	
	$\overline{x^4} = mp \left\{ 1 + [1 - q(1-r)](m-1) \left[ 7 + \left( 1 - q \frac{1-r}{1+r} \right) (m-2) \left\{ 6 + \left( 1 - q \frac{1-r}{1+2r} \right) (m-3) \right\} \right] \right\} \quad (5.10)$	
Центральные моменты	$\mu_2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = [1 + r(m-1)]mpq \quad (5.11)$	
	$\mu_3 = \overline{(x - \bar{x})^3} = \frac{[1 + r(m-1)][1 + r(2m-1)]}{1+r} mpq(q-p) \quad (5.12)$	
	$\mu_4 = \overline{(x - \bar{x})^4} = \frac{mpq[1 + r(m-1)]}{(1+r)(1+2r)} \times \left\{ (1-r)(1-2r) + 6mr[1 + r(m-1)] + 3mpq[1 + r(m-1)](1-7r) - 6pq(1-r)^2 \right\} \quad (5.13)$	
Характеристики распределений	$\bar{x}_i = mp \quad (5.14)$	
	$\sigma^2 = \mu_2 = [1 + r(m-1)] \cdot mpq \quad (5.15)$	
	$\alpha = \frac{1 + r(2m-1)}{(1+r)\sqrt{1+r(m-1)}} \cdot \frac{q-p}{\sqrt{mpq}} \quad (5.16)$	
	$\tau = \frac{1-r}{(1+r)(1+2r)} \left\{ \frac{(1-2r)}{[1+r(m-1)]mpq} + \frac{6r}{pq(1-r)} + \frac{3(1-7r)}{(1-r)} - \frac{6(1-r)}{m[1+r(m-1)]} \right\} - 3 \quad (5.17)$	

Совпадение выражений (5.7) – (5.17) в таблице 5 дает основания отнести пирамидальное и гипергеометрическое распределения к одному семейству трехпараметрических распределений, которые отличаются одинаковой зависимостью своих свойств от параметров  $m, r$  и  $p$ . При  $m = 2$  к этому семейству можно отнести

распределения  $f(x)$  произвольного вида. Такие распределения при  $x = 0, 1, 2$  характеризуются тремя значениями  $f_0, f_1$  и  $f_2$ , которые удовлетворяют условию  $f_0 + f_1 + f_2 = 1$ , что и позволяет считать их трехпараметрическими (с учетом параметра  $m = 2$ ). Их свойства также описываются выражениями (5.7) – (5.17) при любом виде  $f(x)$ .

При  $m = 3$  к числу трехпараметрических распределений можно отнести лишь симметричные распределения  $f(x)$ . Кроме условия нормировки  $f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 1$ , значения  $f_0, f_1, f_2$  и  $f_3$ , определяющие вид распределения  $f(x)$  при  $x = 0, 1, 2, 3$ , в силу симметрии  $f(x)$  удовлетворяют еще двум равенствам  $f_0 = f_3$  и  $f_1 = f_2$ , что и обуславливает их трехпараметрический характер (с учетом параметра  $m = 3$ ). В справедливости выражений (5.7) – (5.17) для таких распределений, как колоколообразного, так и U-образного вида нетрудно убедиться при непосредственной проверке.

Соотношения (5.7) – (5.17) выполняются и для других известных распределений. К их числу относится, например, равномерное распределение

$$\rho(x, m) = \rho_0 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_m = \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, \dots, \frac{1}{m+1}, \quad (23)$$

которое является однопараметрическим с параметром  $m$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно в выражении (4) задать значения  $i = 1$  и  $n = 1$ . В этом случае выражение (4) будет описывать равномерное распределение, а соотношения (5.7) – (5.17) – его свойства.

Свойства биномиального распределения  $b(x, m, p)$  [2, с. 39–50] также описываются выражениями (5.7) – (5.17). Нетрудно видеть, что при  $r = 0$  они преобразуются в выражения, характерные для этого распределения.

Данные таблицы 5 свидетельствуют не только о взаимосвязи пирамидального, гипергеометрического и биномиального распределений, но и об их отличии,

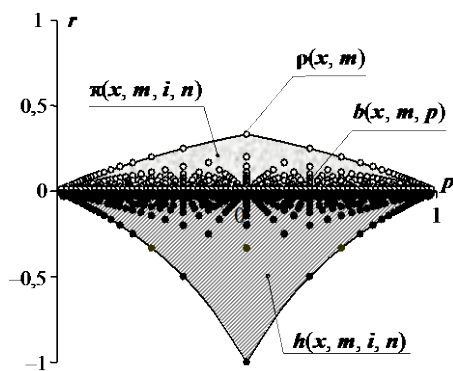


Рис. 3

что иллюстрирует рисунок 3. Точки, изображенные на этом рисунке, отражают тот факт, что использовать распределения  $\pi(x, m, i, n)$  и  $h(x, m, i, n)$  можно лишь при значениях  $p$  и  $r$ , обеспечивающих целочисленный характер  $I$  и  $n$ . На рисунке координаты светлых точек задают значения  $p$  и  $r$  для распределения  $\pi(x, m, i, n)$ , а координаты темных точек – значения  $p$  и  $r$ , которые отвечают распределению  $h(x, m, i, n)$ .

По рисунку 3 видно, что различие между  $\pi(x, m, i, n)$  и  $h(x, m, i, n)$  определяется расположением точек. Если распределение

$h(x, m, i, n)$  отвечает отрицательным значениям  $-1 \leq r \leq 0$ , то распределение  $\pi(x, m, i, n)$  – положительным значениям  $0 \leq r \leq 1/3$ , при этом значения  $p$  и  $r$  изменяются дискретным образом.

Что касается равномерного распределения  $\rho(x, m)$ , то на рисунке 3 оно отображается светлой точкой, которая является вершиной криволинейного треугольника, соответствующего распределению  $\pi(x, m, i, n)$  при  $r = 1/3$  и  $p = 1/2$ . При этом ось абсцисс отвечает биномиальному распределению  $b(x, m, p)$ , для которого  $r = 0$ , а значения  $p$  могут быть любыми в интервале от 0 до 1.

Из рисунка 3 видно, что биномиальное распределение занимает промежуточное положение между пирамидальным и гипергеометрическим распределениями. В наличии перехода от пирамидального распределения к биномиальному проще всего убедиться по графику, задавшись для распределения  $\pi(x, m, i, n)$  достаточно большим значением  $n$ . Отмеченную возможность иллюстрирует рисунок 4, на котором изображены огибающие распределений  $\pi(x, m, i, n)$  и  $b(x, m, p)$  при  $p = 0,25, 0,5, 0,75$  и  $m = 100$ . Для распределения  $\pi(x, m, i, n)$  использованы значения  $m = 100, n = 9999$  и  $i = 7500, 5000, 2500$ , которые соответствуют согласно выражениям (20) и (21) выбранным значениям  $p$  и значению  $r = 1/10001$ .

На рисунке 4 огибающие распределений  $\pi(x, m, i, n)$  отображаются широкими темными линиями, а огибающие распределений  $b(x, m, p)$  – узкими линиями белого цвета. Накладываясь на линии темного цвета, белые линии делят их на две части в силу совпадения графиков. По этой причине графики огибающих для распределений  $b(x, m, p)$  и  $\pi(x, m, i, n)$  отображаются на рисунке 4 двойными линиями, что и является наглядным свидетельством совпадения самих распределений. Аналогичным образом можно проиллюстрировать взаимное наложение других рас-

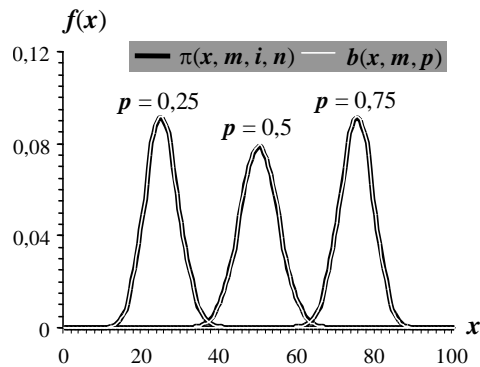


Рис. 4

пределений ( $\pi(x, m, i, n), h(x, m, i, n)$  и  $b(x, m, p)$ ), взятых попарно.

Приведенные в таблице 5 выражения выделяют семейство трехпараметрических распределений с универсальным видом зависимости моментов от параметров  $m, p$  и  $r$ , определяемых модулем (19). К числу известных распределений, которые совпадают с пирамидальным еще и по своему виду, относится отрицательное гипергеометрическое распределение [2, с. 436–437]:

$$\bar{h}(x, N, M, \mu) = \frac{1}{C_N^M} C_{x+\mu-1}^x C_{N-\mu-x}^{M-\mu}. \quad (24)$$

Распределение (24) описывает выбор элементов без возвращения из некоторой генеральной совокупности объема  $N$ , состоящей из  $M$  «отмеченных» и  $N - M$  «неотмеченных» элементов. Данное распределение также является трехпараметрическим с параметрами  $N, M$  и  $\mu$ . Чтобы убедиться в совпадении выражений (4) и (24), достаточно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{cases} M = n, \\ N = m + n, \\ \mu = n + 1 - i, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} n = M, \\ m = N - M, \\ i = M + 1 - \mu, \end{cases} \quad (26)$$

которые устанавливают взаимосвязь параметров  $N$ ,  $M$  и  $\mu$  с параметрами  $m$ ,  $n$  и  $i$ .

С помощью соотношений (25) выражение (24) преобразуется в выражение (4), а с помощью соотношений (26) выражение (4) – в выражение (24). В соответствии с этим для отрицательного гипергеометрического распределения будут также выполняться все соотношения, приведенные в таблице 5, при значениях  $r$ ,  $p$  и  $m$ , которые определяются равенствами:

$$\begin{cases} p = \frac{\mu}{M + 1}, \\ r = \frac{1}{M + 2}, \\ m = N - M. \end{cases} \quad (27)$$

Что касается рисунка 3, то светлые точки, отображающие возможные значения  $p$  и  $r$  для пирамидального распределения (4), будут соответствовать разрешенным значениям этих параметров и для отрицательного гипергеометрического распределения (24).

Соотношения (25) и (26) говорят о том, что распределения (4) и (24) отличаются лишь выбором параметров. Данная особенность, тем не менее, является весьма существенной. Если выражение (24) с параметрами  $N$ ,  $M$  и  $\mu$  описывает выбор элементов без возвращения из некоторой совокупности «отмеченных» и «неотмеченных» элементов, то выражение (4) – долю определенных выборок из статистического веса в статистике Бозе – Эйнштейна, что уже свидетельствует о его самостоятельной значимости. Дополнительную значимость распределению  $\pi(x_i, m, i, n)$  придает его взаимосвязь с распределением точек в решетчатой пирамиде, которая важна тем, что создает условия для решения задач, связанных со сложением как распределений  $\pi(x_i, m, i, n)$ , так и распределений  $\bar{h}(x, N, M, \mu)$ .

В целом можно констатировать, что пирамидальное распределение относится к числу простейших трехпараметрических распределений и обладает свойствами, которые соотносятся со свойствами целого ряда известных распределений: равномерного, биномиального, гипергеометрического и отрицательного гипергеометрического. На примере пирамидального распределения удобно проследить единообразие упомянутых распределений и их отличия.

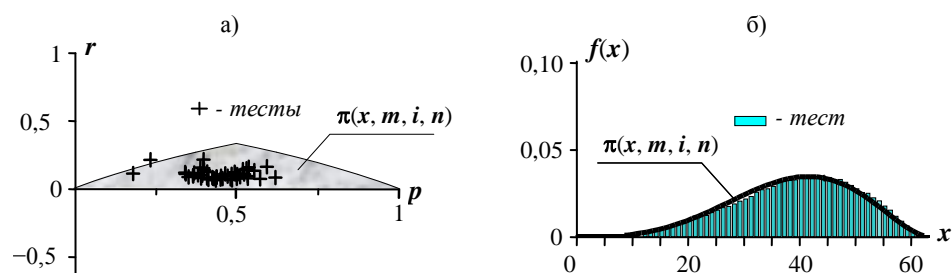


Рис. 5

В практическом отношении пирамидальное распределение может оказаться полезным, например, при моделировании итогов тестирования учащихся, оцениваемых по однобалльной шкале, о чем свидетельствуют данные работы [3], в которой приведены результаты обработки итогов тестирования для 10 учебных предметов по соотношениям (19). Такая обработка была проведена автором [3] для 79 ансамблей с общим числом испытуемых, равным 2 678 751 школьник. При этом оказалось (рис. 5а), что из 79 точек, описывающих итоги тестирования в координатах  $p - r$ , лишь одна точка несколько выходит за пределы криволинейного треугольника, соответствующего на рисунке 3 пирамидальному распределению. Это свидетельствует о том, что распределение  $\pi(x, m, i, n)$  пригодно для моделирования итогов тестирования. Возможность подобного моделирования непосредственно иллюстрирует рисунок 5б, где отображены итоги тестирования учащихся по русскому языку (2002 г., 62 задания в тесте, 77 006 учащихся) в сравнении с распределением  $\pi(x, m, i, n)$  при  $m = 62$ ,  $i = 3$  и  $n = 7$ .

О возможности использования пирамидального распределения при обсуждении итогов тестирования свидетельствуют и данные работы [6]. В процессе моделирования этих итогов с помощью выражения (4) удалось разрешить ряд проблем, связанных с истолкованием тестового балла, с выбором оптимальных параметров тестирования, с оценкой влияния сложности заданий, внутрипредметной взаимосвязи учебного материала и методов решения задач на итоги тестирования и разрешение педагогического теста.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян, С.А., Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст] / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Вероятность и математическая статистика [Текст] : энцикл. / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М. : Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
3. Замятина, В.С. Статистические итоги результатов тестирования учащихся [Текст] // Единство традиций и инноваций в системе непрерывного естественно-математического образования : тр. Междунар. науч.-метод. конф., посвящ. 105-летию со дня рождения А.В. Перышкина / РГУ имени С.А. Есенина. – Рязань, 2007. – С. 145–150.
4. Кирьяков, Б.С. Дидактическая модель тестовой системы оценки: однократное и кратное тестирование [Текст] // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. – 2009. – № 3/24. – С. 3–35.

5. Кирьяков, Б.С. Простейшие решетчатые объекты: статистические свойства, связь с квантовыми статистиками, проектирование контрольных заданий [Текст] // Вестник Рязанского государственного университета имени С.А. Есенина. 2007. – № 1/14. – С. 3–26.

6. Кирьяков, Б.С. Статистическая интерпретация итогов контроля знаний учащихся по суммарным результатам [Текст] // Проблемы учебного физического эксперимента : сб. науч. тр. – М. : ИСМО–РАО, 2006. – Вып. 24.– С. 3–13.

## REFERENCES

1. Ayvazyan, S.A. Prikladnaya statistika i osnovy ekonometriki [Applied Statistics and Econometrics basics] [Text] / S.A. Ayvazian, V.S. Mkhitaryan. – Moscow : UNITY, 1998. – 1022

2. Kir'yakov, B.S. Didakticheskaya model' testovoy sistemy otsenki: odнократnoye I kratnoye testirovaniye [Didactic model test system evaluation: single and multiple testing] [Text] // Bulletin of the Ryazan State University named after S.A. Esenin. – 2009. – № 3/24. – P. 3–35.

3. Kir'yakov, B.S. Prosteyskiye reshchatyye ob'yekty: statisticheskiye svoystva, svyaz' s kvantovymi statistikami, proyektirovaniye kontrol'nykh zadaniy [The simplest lattice points of the statistical properties, the connection with quantum statistics, design of control tasks] [Text] // Bulletin of the Ryazan State University named after S.A. Esenin. – 2007. – № 1/14. – P. 3–26.

4. Kir'yakov, B.S. Statisticheskaya interpretatsiya itogov kontrolya znaniy uchashchikhsya po summarnym rezul'tatam [The statistical interpretation of the results of monitoring students' knowledge of the total result] [Text] // Problems of educational physical experiment. – Moscow : Ismo-RAO, 2006. – № 24. – P. 3–13.

5. Veroyatnost' i matematicheskaya statistika [Probability and Mathematical Statistics] [Text] : Encyclopedia / ed. by Y.V. Prokhorov. – Moscow : Great Russian Encyclopedia, 1999. – 910 p.

6. Zamyatina, V.S. Statisticheskiye itogi rezul'tatov testirovaniya uchashchikhsya [Statistical results of the test results of students] [Text] // Unity of tradition and innovation in lifelong science and math education: International scientific-methodical conference dedicated to the 105th anniversary of the birth of A. Peryshkina / RSU named after S.A. Esenin. – Ryazan, 2007. – P. 145–150.

**B.S. Kiryakov**

## PYRAMIDAL DISTRIBUTION AND ITS PROPERTIES

The article focuses on the properties of lattice point distribution in multilevel pyramids. The article traces the dependence of pyramidal distribution on statistic weight, which is characteristic of Bose-Einstein statistics. The properties of pyramidal distribution (the initial and central moments of distribution, the coefficient of asymmetry and the coefficient of excess) are recorded in a way that is universal for hypergeometric, negative hypergeometric, binomial, steady, and other types of distribution. The article maintains that pyramidal distribution can be used for the composition of distributions and real process modeling.

*Lattice pyramid, point distribution, Bose-Einstein statistics, statistic weight, distribution, pyramidal, hypergeometric, negative hypergeometric, binomial, steady, initial moments, central moments, coefficient of asymmetry, coefficient of excess, universal way, composition of distributions, practical implementation.*