УДК 51(07): 372.851

А.М. Лавров

О ЗАДАЧЕ НА ПРОГРЕССИЮ ИЗ ЗАОЧНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

В статье приводятся два способа решения задачи на прогрессию из заочного тура олимпиады «Покори Воробьевы горы!»: одно – традиционное алгебраическое, близкое к школьному, другое – геометрическое, более короткое и более изящное.

арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, квадратный трехчлен, олимпиада «Покори Воробьевы горы!».

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова совместно с газетой «Московский комсомолец» в седьмой раз проводит поиск талантливых ребят во всех уголках нашей страны. Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!» уже стала традиционной и играет важную роль для тех, кто хочет получить высшее образование в лучших вузах нашей страны. Благодаря этой олимпиаде школьники из самых удаленных уголков России получили возможность стать студентами ведущих университетов страны. Как показывает статистика, те, кто поступил в высшие учебные заведения благодаря олимпиаде «Покори Воробьевы горы!», учатся на хорошие и отличные оценки.

Олимпиада стартовала в 2005 году, когда праздновался 250-летний юбилей Московского университета имени М.В. Ломоносова, и уже тогда вызвала широкий резонанс. С тех пор уже около 60 тясяч школьников приняли участие в олимпиаде, а более 2 тясяч победителей и призеров стали студентами МГУ.

В российской глубинке много талантливой молодежи стремится к знаниям, и олимпиада «Покори Воробьевы горы!» служит высокой и благородной цели – отыскать таланты по всей России.

Организаторы олимпиады возлагают особые надежды на олимпиадное движение в целом и на акцию «Покори Воробьевы горы!» в частности, стараясь вместе с «Московским комсомольцем» найти новых юных Ломоносовых.

Согласно «Порядку проведения олимпиад школьников», утвержденному приказом № 285 Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 октября 2007 года (в редакции приказов Министерства образования и науки Российской Федерации от 4 сентября 2008 года № 255, от 20 марта 2009 года № 92, от 6 октября 2009 года № 371, от 11 октября 2010 года № 1006) и «Положению об олимпиаде школьников «Покори Воробьевы горы!», олимпиада проводится в два этапа – отборочный и заключительный. К участию в заключительном (очном) этапе олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» допускаются только победители и призеры отборочного (заочного) этапа олимпиады 2011 года, а также победители и призеры олимпиады 2010 года по конкретному предмету, которые продолжают освоение общеобразовательных программ среднего (полного) общего образования.

С целью подготовки к будущим олимпиадам публикуются не только сами задания, но и решения задач, предлагавшихся на предыдущих олимпиадах [1–5]. К сожалению, некоторые из этих решений слишком прямолинейны, длинны и никак не могут считаться «олимпиадными».

В статье приведено красивое геометрическое решение задачи на прогрессию из заочного тура олимпиады «Покори Воробьевы горы!» 2010 года, которое является более коротким и более изящным по сравнению с авторским [4].

Задача 6. Найдите все значения $k > 2$, при каждом из которых существует непостоянная арифметическая прогрессия $x_1, \dots, x_k$ и квадратный трехчлен $f(x)$, для которых $f(x_1),\dots,f(x_k)$ – геометрическая прогрессия.

Приведем вначале стандартное алгебраическое решение этой задачи, близкое к изложенному в [4].

Пусть $x_1, \dots, x_k$ – арифметическая прогрессия и $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – искомый квадратный трехчлен, причем $\alpha \neq 0$.

Если $f(x_1),\dots,f(x_k)$ – геометрическая прогрессия, то

$$\forall\, n = 2,\dots,k-1,$$

$$\left[f(x_n)\right]^2 = f(x_{n-1}) \cdot f(x_{n+1}), \tag{1}$$

то есть $\left(\alpha x_n^2 + \beta x_n + \gamma\right)^2 = \left(\alpha x_{n-1}^2 + \beta x_{n-1} + \gamma\right) \cdot \left(\alpha x_{n+1}^2 + \beta x_{n+1} + \gamma\right)$,

или, после деления обеих частей на $\alpha^2 \neq 0$,

$$\left(x_n^2 + \frac{\beta}{\alpha} x_n + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \left(x_{n-1}^2 + \frac{\beta}{\alpha} x_{n-1} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \cdot \left(x_{n+1}^2 + \frac{\beta}{\alpha} x_{n+1} + \frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Обозначая $\dfrac{\beta}{\alpha} = p,\ \dfrac{\gamma}{\alpha} = q$, можно считать, что исходный квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ – приведенный.

Пусть $d \neq 0$ – разность арифметической прогрессии и $x_n = a$. Тогда $x_{n-1} = a - d, \quad x_{n+1} = a + d$ и условие (1) принимает вид

$$\left[f(a)\right]^2 = f(a-d) \cdot f(a+d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 + pa + q\right)^2 = \left[(a-d)^2 + p(a-d) + q\right] \cdot \left[(a+d)^2 + p(a+d) + q\right],$$

откуда после упрощений получаем

$$q = a^2 + ap + \frac{p^2 - d^2}{2} . \qquad (2)$$

Таким образом, выбирая произвольным образом величины a, p и $d \neq 0$, вычисляем по ним q по формуле (2) и получаем квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$. Если при этом $f(a-d) \neq 0,\ f(a) \neq 0,\ f(a+d) \neq 0$, то числа $f(a-d),\ f(a),\ f(a+d)$ будут давать геометрическую прогрессию.

Пример 1. Возьмем $a = 0$ и $p = 0$. Тогда $q = -\frac{d^2}{2}$, квадратный трехчлен принимает вид $f(x) = x^2 - \frac{d^2}{2}$, а исходная арифметическая прогрессия – это: $-d;\ 0;\ d$. При этом числа $f(-d) = \frac{d^2}{2},\ f(0) = -\frac{d^2}{2},\ f(d) = \frac{d^2}{2}$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем -1, то есть значение $k = 3$ подходит.

Заметим, что $f(\pm 2d) = \frac{7d^2}{2}$, то есть продолжить эту геометрическую прогрессию ни влево, ни вправо не удается.

Пример 2. Возьмем $a = p = d = 1$. Тогда $q = 2$, квадратный трехчлен принимает вид $f(x) = x^2 + x + 2$, а исходная арифметическая прогрессия – это: $0;\ 1;\ 2$. При этом числа $f(0) = 2,\ f(1) = 4,\ f(2) = 6$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Но $f(-1) = 2$, а $f(3) = 14$, то есть, как и в предыдущем примере, продолжить эту геометрическую прогрессию ни влево, ни вправо не удается. Это значит, что $k \geq 4$ уже не будет удовлетворять условию задачи.

Докажем это.

Напомним, что условие (2), составленное по арифметической прогрессии $x_{n-1} = a - d,\ x_n = a$ и $x_{n+1} = a + d$, записывается следующим образом:

$$q = a^2 + ap + \frac{p^2 - d^2}{2} .$$

Тем самым для арифметической прогрессии $x_{n-1},\ x_n,\ x_{n+1}$ оно принимает вид

$$q = x_n^2 + px_n + \frac{p^2 - d^2}{2}, \tag{3}$$

а для арифметической прогрессии x_n, x_{n+1}, x_{n+2} следующий вид:

$$q = x_{n+1}^2 + px_{n+1} + \frac{p^2 - d^2}{2}. \tag{4}$$

Приравнивая (4) и (3), получаем

$$x_{n+1}^2 + px_{n+1} + \frac{p^2 - d^2}{2} = x_n^2 + px_n + \frac{p^2 - d^2}{2},$$

откуда $\left(x_{n+1} - x_n\right)\left(x_{n+1} + x_n + p\right) = 0$, а так как по условию $x_{n+1} - x_n \neq 0$, то $p = -x_{n+1} - x_n = -2a - d$. Тогда в соответствии с (2)

$$q = a^2 + a\left(-2a - d\right) + \frac{\left(-2a - d\right)^2 - d^2}{2} = a^2 + ad$$

и квадратный трехчлен

$$f(x) = x^2 + px + q = x^2 - (2a + d)x + a^2 + ad = \left(x - a\right) \cdot \left[x - \left(a + d\right)\right]$$

обращается в ноль в точках $x_n = a$ и $x_{n+1} = a + d$, то есть при $k \geq 4$ геометрическая прогрессия не получается. Следовательно, ответ: $k = 3$.

Однако, помимо приведенного выше аналитического решения, у этой задачи есть изящное геометрическое, основанное на том, что между двумя нулями гладкой функции есть ноль ее производной.

Пусть $x_i = a + (i-1) \cdot d,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ – некоторая арифметическая прогрессия с разностью d, которую без ограничения общности можно считать положительной, $f(x)$ – искомый квадратный трехчлен и $f(x_i) = b \cdot q^{i-1},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ – геометрическая прогрессия со знаменателем q.

При этом случай $q = 1$ сразу исключается, так как квадратный трехчлен не может принимать одно и то же значение в четырех (и даже в трех) различных точках.

Если $q<0$, то функция $f(x)$ меняет знак на каждом из интервалов $(x_1,\ x_2)$, $(x_2,\ x_3)$ и $(x_3,\ x_4)$ и у квадратного трехчлена оказывается не менее трех различных корней, что невозможно.

В случае $q>0$, $q\neq 1$, рассмотрим функцию

$$g(x)=b\cdot q^{\frac{x-a}{d}}\equiv c\cdot e^{\alpha x}, \text{ где } c=b\cdot q^{-\frac{a}{d}}\neq 0 \text{ и } \alpha=\frac{\ln q}{d}\neq 0.$$

По построению $\forall\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$$g(x_i)=b\cdot q^{\frac{x_i-a}{d}}=b\cdot q^{i-1}\equiv f(x_i).$$

Тем самым гладкая функция $h(x)=f(x)-g(x)$ имеет, по крайней мере, четыре нуля и три интервала $(x_1,\ x_2)$, $(x_2,\ x_3)$ и $(x_3,\ x_4)$, на каждом из которых есть точки $y_1,\ y_2,\ y_3$ экстремумов, где производная $h'(x)=0$; на каждом из двух внутренних интервалов $(y_1,\ y_2)$ и $(y_2,\ y_3)$ есть точки z_1 и z_2 экстремумов первой производной, где вторая производная $h''(x)=0$ и между ними есть точка t, где $h'''(t)=0$.

Но $h'''(x)=f'''(x)-g'''(x)=-c\cdot\alpha^3\cdot e^{\alpha x}\neq 0$ – противоречие, доказывающее невозможность предположения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, В. Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» [Текст] / В. Алексеев [и др.] // Математика. – 2010. – № 23. – С. 30–37.
2. Алексеев, В. Олимпиада «Ломоносов – 2010» [Текст] / В. Алексеев [и др.] // Математика. – 2010. – № 24. – С. 34–40.
3. Задачи вступительных экзаменов [Текст] / сост. А.А. Егоров, В.А. Тихомирова. – М. : Бюро Квантум, 2008. – 176 с. (Приложение к журналу «Квант». 2008. № 6.)
4. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005–2008) [Текст]. – М. : Изд-во МГУ, 2008. – 48 с.
5. Экзаменационные материалы по математике и физике [Текст] / сост. А.А. Егоров, С.А. Дориченко, В.А. Тихомирова. – М. : Бюро Квантум, 2009. – 208 с. (Приложение к журналу «Квант». 2009. № 6.)