УДК 517.925

М.Т. Терёхин, Е.М. Фулина

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Исследуется проблема устойчивости невозмущенного движения системы дифференциальных уравнений второго порядка с нулевой матрицей системы линейного приближения. В основе выполненных исследований лежат теоремы Ляпунова об устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости невозмущенного движения и теорема Четаева.

При доказательстве теорем об устойчивости (неустойчивости) существенно используются понятие присоединённого многочлена формы, понятие псевдокорня присоединенного многочлена.

Определено взаимное расположение корней присоединенных многочленов формы $V_n(x, y)$ и ее производной в силу системы, посредством которого можно найти условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения. Рассмотрен пример системы дифференциальных уравнений, исследование примера выполнено на основании изложенной в статье теории. Применен метод Штурма для определения взаимного расположения корней присоединенных многочленов.

знакоопределенная форма, метод Штурма, присоединенный многочлен, производная в силу системы, псевдокорень присоединенного многочлена, число перемен знаков, четные и нечетные числа.

Проблемы устойчивости невозмущенного движения исследовались во многих работах. Наиболее общие результаты содержатся в работах [1–4].

В статье исследуется проблема устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения $(x=0,\ y=0)$ системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}=X_m(x,y),\ \ \dot{y}=Y_m(x,y), \tag{1}$$

в которой $X_m(x,y),\ Y_m(x,y)$ — формы порядка $m \geq 2$ (m — натуральное число).

I. Пусть $V_n(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_{(n-i)i} x^{n-i} y^i$ при любом $i=\overline{1,n}$ $a_{(n-i)i}$ — постоянные числа, и пусть $y=kx$, k — постоянное число. Тогда $V_n(x,y)=x_n \sum_{i=0}^{n} a_{(n-i)i} k^i$.

Определение 1 [5]. Пусть форма $V_n(x,y)$ такова, что $a_{n0}\neq 0,\ a_{0n}\neq 0$. Многочлен $\sum_{i=0}^{n} a_{(n-i)i} k^i$ назовем присоединенным многочленом формы $V_n(x,y)$ и обозначим символом $F\left(V_n,\, k\right)$, а $V_n(x,y)$ — формой, имеющей присоединенный многочлен. Следовательно, можно записать

$$B_q(x,y)=x^q F\left(B_q,k\right) \tag{2}$$

для любой формы $B_q(x,y)$ (q — натуральное число и $y=kx$). Тогда из определения 1 следует, что $k=0$ не является корнем присоединенного многочлена $F\left(V_n,k\right)$, а $k_1=0$ не является корнем многочлена $\sum_{i=0}^{n} a_{i(n-i)} k_1^i$.

Лемма 1. Форма $V_n(x,y)$ тогда и только тогда имеет присоединенный многочлен $F\left(V_n,k\right)$, когда при любых $x\neq 0,\ y\neq 0$ выполняются неравенства: $V_n(0,y)\neq 0,\ V_n(x,0)\neq 0$.

Лемма непосредственно следует из определения 1.

Лемма 2[5]. Для того чтобы форма $V_n(x,y)$ была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы ее присоединенный многочлен $F\left(V_n,k\right)$ не имел действительных корней.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V_n(x,y)$ — знакоопределенная форма. Следовательно, $V_n(0,y)\neq 0$ при $y\neq 0$ и $V_n(x,0)\neq 0$ при $x\neq 0$. Согласно лемме 1 это значит, что $V_n(x,y)$ имеет присоединенный многочлен $F\left(V_n,k\right)$. Тогда при $y=kx$ получим, что $V_n(x,y)=x^n F\left(V_n,k\right)$.

Пусть вопреки утверждению некоторое число k_0 является корнем многочлена $F\left(V_n, k\right)$. Это значит, что в точке $\left(x_1, y_1\right)$, такой, что $x_1 \neq 0$, $y_1 = k_0 \cdot x_1$, будет выполнено равенство $V_n\left(x_1, y_1\right) = 0$, что невозможно.

Достаточность. Пусть форма $V_n\left(x, y\right)$ имеет присоединенный многочлен $F\left(V_n, k\right)$, не имеющий вещественных корней. Это значит, что $V_n\left(0, y\right) \neq 0$ при $y \neq 0$ и $V_n\left(x, 0\right) \neq 0$ при $x \neq 0$. Пусть вопреки утверждению существует точка $\left(x_1, y_1\right) \neq \left(0, 0\right)$, удовлетворяющая равенству $V_n\left(x_1, y_1\right) = 0$. Следовательно, $x_1 \neq 0$.

Выберем k_0 согласно равенству $y_1 = k_0 x_1$.

Тогда $V_n\left(x_1, y_1\right) = x_1^n F\left(V_n, k_0\right)$. Отсюда следует, что $F\left(V_n, k_0\right) = 0$, что невозможно.

Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть q — произвольное натуральное число. Тогда, согласно равенству (2), для того, чтобы форма $V_q\left(x, y\right)$ была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$sign V_q\left(x, y\right) = sign F\left(V_q, k\right) \tag{3}$$

при любых x, y, таких, что $\left|x\right| + \left|y\right| \neq 0$, и любых k.

II. Пусть $\dot{V}_n\left(x, y\right)$ — производная формы $V_n\left(x, y\right)$ в силу системы (1), которую обозначим символом $W_s\left(x, y\right)$, то есть $\dot{V}_n\left(x, y\right) = W_s\left(x, y\right)$.

Замечание 1. В основе исследования проблемы устойчивости невозмущенного движения системы (1), выполненного в статье, лежат теоремы Ляпунова и Четаева [3].

Теорема 1 [5]. Если присоединенные многочлены форм $V_n\left(x, y\right)$ и $W_s\left(x, y\right)$ не имеют действительных корней и при некотором значении $k = k_0 \in R$ выполняется неравенство $F\left(V_n, k_0\right) F\left(W_s, k_0\right) < 0,$ $\left(F\left(V_n, k_0\right) F\left(W_s, k_0\right) > 0\right)$, то невозмущенное движение системы (1) асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Теорема непосредственно следует из леммы 2, из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (неустойчивости).

Теорема 2. Если присоединенный многочлен формы $W_s(x,y)$ не имеет действительных корней, а присоединенный многочлен формы $V_n(x,y)$ имеет действительный корень нечетной кратности, то невозмущенное решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что форма — знакоопределенная. Но так как присоединенный многочлен формы $V_n(x,y)$ имеет корень нечетной кратности, то согласно равенству (2) в любой окрестности начала координат форма $V_n(x,y)$ принимает значения разных знаков. Отсюда и из теоремы Ляпунова о неустойчивости следует, что невозмущенное движение системы (1) неустойчиво. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть a, b $(a<b)$ — соседние корни присоединенного многочлена $F(V_n,k)$; присоединенный многочлен $F(W_s,k)$ в интервале $(a;b)$ не имеет корней. Тогда если при $k\in(a;b)$ $F(V_n,k)F(W_s,k)>0$, то невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

Справедливость теоремы следует из условий теоремы, равенства (2), а также из того, что на лучах $y=ax$, $y=bx$ $(x>0)$ $V(x;y)=0$, и теоремы Четаева.

Пусть $V_n(x,y)=x^{\nu}y^{\mu}V_{n-\mu-\nu}(x,y)$, где $V_{n-\mu-\nu}(x,y)$ — форма порядка $n-\mu-\nu$, имеющая присоединенный многочлен, μ,ν — целые неотрицательные числа, $n-\mu-\nu\ge 0$.

Теорема 4. Пусть присоединенный многочлен $F(W_s,k)$ не имеет действительных корней. Тогда невозмущенное движение системы (1) неустойчиво, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) присоединенный многочлен $F(V_{n-\mu-\nu},k)$ не имеет действительных корней и выполнено хотя бы одно из условий:

а) одно из чисел μ,ν — нечетное,

б) оба числа μ,ν — четные, и

$$F(W_s,k)F(V_{n-\mu-\nu},k)>0\,; \tag{4}$$

2) присоединенный многочлен $F(V_{n-\mu-\nu},k)$ имеет корень нечетной кратности.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $W_s(x,y)$ — знакоопределенная форма.

Если присоединенный многочлен $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$ не имеет действительных корней, ($V_{n-\mu-\nu}\left(x,y\right)$ — знакоопределенная форма и хотя бы одно из чисел μ,ν — нечетное или многочлен $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$ имеет корень нечетной кратности (см. равенство (2)), то в любой окрестности начала координат форма $V_n\left(x,y\right)$ принимает значения разных знаков, то есть не является знакопостоянной, знака, противоположного знаку формы $W_s\left(x,y\right)$. Поэтому, по теореме Ляпунова о неустойчивости, следует неустойчивость невозмущенного движения системы (1).

Аналогично в случае, когда μ,ν — четные числа и выполнено неравенство (4), справедливость теоремы следует из теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Теорема доказана.

III. **Определение 2 [5].** Пусть $B_q\left(x,y\right)$ — форма порядка q, представленная равенством $B_q\left(x,y\right)=x^{\xi}y^{\eta}B_{q-\eta-\xi}\left(x,y\right)$, где $B_{q-\eta-\xi}\left(x,y\right)$ — форма порядка $q-\eta-\xi$, имеющая присоединенный многочлен, η,ξ — целые неотрицательные числа, $q-\eta-\xi\geq 0$. Тогда $k=\pm\infty$ назовем псевдокорнями присоединенного многочлена $F\left(B_{q-\eta-\xi},k\right)$, если $\xi\neq 0$, а число $k=0$ — псевдокорнем этого многочлена, если $\eta\neq 0$.

Из определения 2 следует, что если $k=\pm\infty$, $k=0$ не являются псевдокорнями многочлена $F\left(B_{q-\eta-\xi},k\right)$, то это значит, что $\xi=0$, $\eta=0$.

Замечание 2. Если $k=\pm\infty$ — псевдокорень многочлена $F\left(B_{q-\eta-\xi},k\right)$, то при любом $y\neq 0$ $B_q\left(0,y\right)=0$; если $k=0$ — псевдокорень многочлена $F\left(B_{q-\eta-\xi},k\right)$, то при любом $x\neq 0$ выполняется $B_q\left(x,0\right)=0$.

Замечание 3. Условимся в том, что псевдокорень $k=+\infty$ определяет положительную полуось оси y, псевдокорень $k=-\infty$ — отрицательную полуось оси y.

Предположим, что форма $W_s\left(x,y\right)$ представлена равенством

$$W_s(x,y) = x^p y^r W_{s-r-p}(x,y).$$

Тогда, учитывая, что $V_n(x,y) = x^{\nu} y^{\mu} V_{n-\mu-\nu}(x,y)$, получим:

$$V_n(x,y)W_s(x,y) = x^{\nu+p} y^{\mu+r} V_{n-\mu-\nu}(x,y)W_{s-r-p}(x,y). \qquad (5)$$

Следовательно, при $y = kx$ получим:

$$V_n(x,y)W_s(x,y) = x^{n+s} k^{\mu+r} F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right) F\left(W_{s-r-p}, k\right). \qquad (6)$$

Учитывая равенство (3), можно записать:

$$sign\left[V_{n-\mu-\nu}(x,y)W_{s-r-p}(x,y)\right] = sign\left[F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right) F\left(W_{s-r-p}, k\right)\right]. \quad 7)$$

Теорема 5. Пусть a, b ($a < b$) — соседние корни присоединенного многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$, среди которых могут быть и псевдокорни, а присоединенный многочлен $F\left(W_{s-r-p}, k\right)$ на интервале $(a;b)$ не имеет корней (в том числе и псевдокорней) и при некотором $k \in (a;b)$ выполняется неравенство

$$F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right) F\left(W_{s-r-p}, k\right) > 0. \qquad (8)$$

Тогда невозмущенное движение системы (1) неустойчиво, если выполнено хотя бы одно из условий:

1) $a \ge -\infty$, $b = 0$ и $\mu + r$ — четное число;

2) $a \ge -\infty, b \ne 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай 1).

1.1) Пусть $a > -\infty, b = 0$. Следовательно, $b = 0$ — псевдокорень многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$. Это значит, что $\mu > 0$. Тогда, полагая, что $y = kx$, учитывая равенство (6) и то, что $\mu + r$ — четное число, получим, что при любом $x > 0$ в области, ограниченной лучами $y = ax$ ($x > 0$), $y = 0$ ($x > 0$), на границе которой $V_n(x,y) = 0$, согласно неравенству (8) выполнено неравенство $V_n(x,y)W_s(x,y) > 0$. Невозмущенное движение системы (1) неустойчиво по теореме Четаева.

1.2) Пусть $a=-\infty,\ b=0$. Из того, что $a=-\infty,\ b=0$ — псевдокорни многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, следует, что $\mu\neq 0,\ \nu\neq 0$. Тогда, полагая что $y=kx$, учитывая соотношения (6) и (8) и четность числа $\mu+r$, получим, что при любом $x>0$ в области, ограниченной лучами $\left(-\infty;0\right]$ ($y<0$), $y=0$ ($x>0$), на границе которой $V_n\left(x,y\right)=0$, выполняется неравенство $V_n\left(x,y\right)W_s\left(x,y\right)>0$. Невозмущенное движение системы (1) по теореме Четаева неустойчиво.

Рассмотрим случай 2).

2.1) Пусть $-\infty<a<0,\ 0<b<+\infty$. Следовательно, a и b не являются псевдокорнями многочленов $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, $F\left(W_{s-r-p},k\right)$. Поскольку $k=0$ не является псевдокорнем многочленов $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, $F\left(W_{s-r-p},k\right)$, то $\mu=r=0$. Поэтому, согласно соотношениям (6) и (8), получим, что $V_n\left(x,y\right)W_s\left(x,y\right)>0$ при любом $x>0$ в области, ограниченной лучами $y=ax$ ($x>0$), $y=bx$ ($x>0$), на границе которой $V_n\left(x,y\right)=0$. Следовательно, по теореме Четаева невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

2.2) Пусть $a=-\infty,\ b>0$. Следовательно, $a=-\infty$ — псевдокорень многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$. Как и в пункте 2.1), устанавливаем, что $\mu=r=0$. Тогда на основании соотношений (6) и (8) приходим к заключению, что при любом $x>0$ $V_n\left(x,y\right)W_s\left(x,y\right)>0$ в области, ограниченной лучами $\left(-\infty;0\right]$ ($y<0$), $y=bx$ ($x>0$), на границе которой $V_n\left(x,y\right)=0$. По теореме Четаева невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

2.3) Пусть $a=-\infty,\ b=+\infty$. Поскольку $a=-\infty,\ b=+\infty$ — псевдокорни многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, $k=0$ не является псевдокорнем многочленов $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, $F\left(W_{s-r-p},k\right)$, то $\mu=r=0$. Следовательно, с учетом неравенства (8) $V_n\left(x,y\right)W_s\left(x,y\right)=x^{n+s}F\left(V_{n-\nu},k\right)F\left(W_{s-p},k\right)>0$ при любом $x>0$ в области, ограниченной лучами $\left(-\infty;0\right]$ ($y<0$), $\left[0;+\infty\right)$ ($y>0$), на границе которой $V_n\left(x,y\right)=0$. Невозмущенное движение неустойчиво согласно теореме Четаева.

2.4) Пусть $a > -\infty$, $b < 0$. Это значит, что a и b не являются псевдокорнями многочленов $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$, $F\left(W_{s-r-p}, k\right)$. Учитывая соотношения (6) и (8), получим, что при любом $x > 0$ в области, ограниченной лучами $y = ax$ ($x > 0$), $y = bx$ ($x > 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, верно неравенство $V_n(x, y)W_s(x, y) > 0$. Неустойчивость невозмущенного движения следует из теоремы Четаева.

2.5) Пусть $a > 0$, $0 < b < +\infty$. Это значит, что a и b не являются псевдокорнями многочленов $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$, $F\left(W_{s-r-p}, k\right)$. Следовательно, согласно соотношениям (6) и (8), получим, что при любом $x > 0$ в области, ограниченной лучами $y = ax$ ($x > 0$), $y = bx$ ($x > 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y)W_s(x, y) > 0$. По теореме Четаева невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

2.6) Пусть $a > 0$, $b = +\infty$. Следовательно, $b = +\infty$ — псевдокорень многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$. Тогда, учитывая соотношения (6) и (8), получим, что при любом $x > 0$ в области, ограниченной лучами $y = ax$ ($x > 0$), $\left[0; +\infty\right)$ ($y > 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y)W_s(x, y) > 0$. Неустойчивость невозмущенного движения системы (1) следует из теоремы Четаева. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть a и b (где $a < b$) — соседние корни присоединенного многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$, среди которых могут быть и псевдокорни, присоединенный многочлен $F\left(W_{s-r-p}, k\right)$ на интервале (a, b) не имеет (в том числе и псевдо) корней и при $k \in (a; b)$ выполняется неравенство

$$F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right) F\left(W_{s-r-p}, k\right) < 0. \tag{9}$$

Тогда невозмущенное движение системы (1) неустойчиво, если выполнено хотя бы одно из условий:

1) $a \geq 0$, число $n + s$ — нечетное;

2) $b \leq 0$ и выполнено одно из условий:

2.1) число $\mu + r$ — нечетное;

2.2) число $n + s$ нечетное, число $\mu + r$ — четное;

3) $0 \in (a;b)$, число $n+s$ — нечетное.

Доказательство. 1) Из того, что $a \geq 0$, следует, что $\mu + r \geq 0$ и при любом $k \in (a;b)$, $k^{\mu+r} > 0$. Следовательно, учитывая неравенства (6) и (9) и то, что число $n+s$ — нечетное, получим, что при любых $x < 0$ в области, ограниченной лучами $y = bx$ ($x < 0$), $y = ax$ ($x < 0$), $0 < a < b < +\infty$ (при $a = 0$ лучами $y = bx$ ($x < 0$), $(-\infty, 0]$ ($x < 0$); при $a = 0$ и $b = \pm\infty$ (псевдокорни многочлена $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$) лучами $(-\infty, 0]\,(y < 0)$, $(-\infty, 0]\,(x < 0)$; при $a > 0$ и $b = \pm\infty$ лучами $(-\infty, 0]\,(y < 0)$, $y = ax\,(x < 0)$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$ согласно соотношениям (6), (9) и нечетности числа $n+s$ выполняется неравенство $V_n(x, y) W_s(x, y) > 0$. По теореме Четаева невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

Рассмотрим случай 2).

2.1) Пусть $a = -\infty$, $b = 0$. Это значит, что $\mu > 0$. Тогда согласно соотношеням (6) и (9), если $\mu + r$ — нечетное число, получим, что при любых $k < 0$ и $x > 0$ в области, ограниченной $(-\infty, 0]\,(y < 0)$, $[0, +\infty)\,(x > 0)$, на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y) W_s(x, y) > 0$; если же μ+r — четное число и $n+s$ — нечетное число, то при любых $k < 0$ и $x < 0$ в области, ограниченной лучами $(-\infty, 0]\,(x < 0)$, $[0, +\infty)\,(y > 0)$, на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y) W_s(x, y) > 0$. Согласно теореме Четаева невозмущенное движение неустойчиво.

2.2) Пусть $a > -\infty, b = 0$. Это значит, что $\mu > 0$. Тогда с учетом соотношений (6) и (9), если $\mu + r$ — нечетное число, то при любых $k < 0$ и $x > 0$ в области, ограниченной лучами $y = ax$ ($x > 0$), $(-\infty, 0]$ ($y < 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y) W_s(x, y) > 0$; если же μ+r четное число, а $n+s$ — нечетное число, то при любых $k < 0$, $x < 0$ в области, ограниченной лучами $[0, +\infty)$ ($y > 0$), $y = ax$ ($x < 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y) W_s(x, y) > 0$. Согласно теореме Четаева невозмущенное движение неустойчиво.

Пусть $a = -\infty$, $b < 0$. Это значит, что $\mu + r \geq 0$. Тогда, полагая $\mu + r > 0$, получим, согласно соотношениям (6) и (9), что если $\mu + r$ — нечетное число, то при любых $k < 0$ и $x > 0$ в области, ограниченной лучами $(-\infty, 0]$ ($y < 0$),

$y = bx$ ($x > 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполняется неравенство $V_n(x, y)W_s(x, y) > 0$. Невозмущенное движение системы (1) по теореме Четаева неустойчиво.

Предположим, что $\mu + r \geq 0$. Учитывая соотношения (6) и (9) и то, что $\mu + r$ — четное число, получим, что при любых $k < 0$, $x < 0$ в области, ограниченной лучами $y = bx$ ($x < 0$),$\left[0, +\infty\right)$ ($y > 0$), на границе которой $V_n(x, y) = 0$, выполняется неравенство $V_n(x, y)W_s(x, y) > 0$. Невозмущенное движение неустойчиво по теореме Четаева.

Пусть $a > -\infty, b < 0$. Это значит, что $\mu + r \geq 0$. В этом случае исследования и выводы аналогичны исследованиям и выводам пункта 2.3). При этом в качестве лучей, ограничивающих область, на границе которой $V_n(x, y) = 0$, необходимо взять лучи $y = ax$ ($x > 0$), $y = bx$ ($x > 0$), если $\mu + r > 0$ — число нечетное; $y = ax$ ($x < 0$), $y = bx$ ($x < 0$), если $\mu + r \geq 0$ — число четное, а $n + s$ — нечетное число.

Рассмотрим случай 3).

($0 \in (a; b)$, число $n + s$ — нечетное). Это значит, что число $k = 0$ не является псевдокорнем многочленов $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$, $F\left(W_{s-r-p}, k\right)$, и поэтому $\mu = r = 0$. Следовательно, учитывая соотношения (6) и (9) и то, что $n + s$ — нечетное число, получим, что при любом $x < 0$ в области, ограниченной соответственно лучами $y = bx$ ($x < 0$), $y = ax$ ($x < 0$);$\left(-\infty, 0\right]$ ($y < 0$), $y = bx$ ($x < 0$); $y = bx$ $(x < 0)$, $\left[0, +\infty\right)$ ($y > 0$); $\left(-\infty, 0\right]$ ($y < 0$), $\left[0, +\infty\right)$ ($y > 0$); $\left(-\infty, 0\right]$ ($y < 0$), $y = ax$ $x < 0$; $y = bx$ $(x < 0)$, $\left[0, +\infty\right)$ $(y > 0)$, на границах которых $V_n(x, y) = 0$, выполнено неравенство $V_n(x, y)W_s(x, y) > 0$. Неустойчивость невозмущенного движения системы (1) следует из теоремы Четаева.

Теорема 7. Пусть присоединенные многочлены не имеют действительных корней и выполнено одно из следующих неравенств:

$$F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)F\left(W_{s-r-p}, k\right) > 0 \tag{10}$$

$$F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)F\left(W_{s-r-p}, k\right) < 0. \tag{11}$$

Тогда:

1) если присоединенные многочлены $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, $F\left(W_{s-r-p},k\right)$ не имеют псевдокорней, то невозмущенное движение системы (1) неустойчиво при условии выполнения неравенства (10), асимптотически устойчиво при условии выполнения неравенства (11);

2) если присоединенный многочлен $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$ не имеет псевдокорней, p, μ — четные числа и выполнено неравенство (11), то невозмущенное движение системы (1) устойчиво;

3) пусть присоединенный многочлен $F\left(W_{s-r-p},k\right)$ не имеет псевдокорней, присоединенный многочлен $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$ имеет псевдокорни. Тогда если $n,\mu \geq 0$ — четные числа и выполнено неравенство (10) или n,μ — числа различной четности, то невозмущенное движение системы (1) неустойчиво;

4) если $\mu = r = 0$, $\nu > 0$, то невозмущенное движение системы (1) неустойчиво либо при выполнении неравенства (10), либо при выполнении неравенства (11) и нечетности числа $n+s$;

5) если $\nu = p = 0$, $\mu > 0$, то невозмущенное движение системы (1) неустойчиво либо при выполнении неравенства (10), либо при выполнении неравенства (11) и нечетности числа $\mu + r$;

6) если $\nu + p$, $\mu + r$ — числа одинаковой четности и выполнено неравенство (10) или либо $\nu + p$ — нечетное число, либо $\mu + r$ — нечетное число и выполнено неравенство (11), то невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Из того, что присоединенные многочлены $F\left(V_{n-\mu-\nu},k\right)$, $F\left(W_{s-r-p},k\right)$ не имеют псевдокорней, следует, что $\mu = \nu = r = p = 0$. Поэтому формы $V_n\left(x,y\right)$, $W_s\left(x,y\right)$ — знакоопределенные (лемма 2). Тогда справедливость утверждения пункта (1) следует из теоремы 1.

Справедливость утверждения пункта 2) следует из теоремы Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения системы (1), поскольку форма $V_n\left(x,y\right)$ — знакоопределенная, форма $W_s\left(x,y\right) = x^p y^r W_{s-r-p}(x,y)$ с учетом равенства (3), неравенства (11), четности чисел p,r является знакопостоянной, знака, противоположного знаку формы $V_n\left(x,y\right)$.

Пусть выполнены условия пункта 3).

Из того, что $p = r = 0$ (присоединенный многочлен $F\left(W_{s-r-p}, k\right)$ не имеет псевдокорней), следует, что форма $W_s\left(x, y\right)$ — знакоопределенная. Учитывая, что многочлен $F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$ имеет псевдокорни, можно записать $V_n\left(x, y\right) = x^n k^\mu F\left(V_{n-\mu-\nu}, k\right)$. Тогда в силу того, что либо n, μ — четные числа и выполнено неравенство (10), либо хотя бы одно из чисел n, μ нечетное и выполнено неравенство (11), получим, что форма $V_n\left(x, y\right)$ не является знакоопределенной, знака, противоположного знаку формы $W_s\left(x, y\right)$. Это значит, согласно теореме Ляпунова о неустойчивости, что невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

Пусть выполнены условия пункта 4). Согласно условиям пункта 4) ($\mu = r = 0$, $\nu > 0$), получим, что

$$V_n\left(x, y\right)W_s\left(x, y\right) = x^{n+s} F\left(V_{n-\nu}, k\right) F\left(W_{s-p}, k\right)$$

и $V_n\left(0, y\right) = 0$ при любом y. Следовательно, либо в области, ограниченной лучами $\left(-\infty, 0\right]$ ($y < 0$), $\left[0, +\infty\right)$ ($y > 0$) (при $x > 0$), при условии, что выполнено неравенство (10), либо в области, ограниченной лучами $\left(-\infty, 0\right]$ ($y < 0$), $\left[0, +\infty\right)$ ($y > 0$) (при $x < 0$), при условии, что $n + s$ — нечетное число и выполнено неравенство (11), будем иметь, что $V_n\left(x, y\right)W_s\left(x, y\right) > 0$. Тогда, по теореме Четаева, невозмущенное движение системы (1) неустойчиво.

Пусть выполнены условия пункта 5). Согласно равенству (3), неравенства (10), (11) эквивалентны соответственно неравенствам

$$V_{n-\mu-\nu}\left(x, y\right)W_{s-r-p}\left(x, y\right) > 0, \tag{10′}$$

$$V_{n-\mu-\nu}\left(x, y\right)W_{s-r-p}\left(x, y\right) < 0. \tag{11′}$$

Тогда, учитывая условия пункта 5), получим, что $V_n\left(x, y\right)W_s\left(x, y\right) = y^{\mu+r} V_{n-\mu}\left(x, y\right)W_{s-p}\left(x, y\right)$ и $V_n\left(x, 0\right) = 0$ при любом x. Следовательно, либо в области, ограниченной лучами $\left(-\infty, 0\right]$ ($x < 0$), $\left[0, +\infty\right)$ ($x > 0$) (при $y > 0$), при условии выполнения неравенства (10′), либо в области ограниченной лучами $\left(-\infty, 0\right]$ ($x < 0$), $\left[0, +\infty\right)$ ($x > 0$) (при $y < 0$), при условии, что $\mu + r$ — нечетное число и выполнено неравенство (11′), будет иметь место неравенство $V_n(x,y)W_s(x,y) > 0$. Неустойчивость невозмущенного движения системы (1) следует из теоремы Четаева.

Пусть выполнены условия пункта 6). Это значит, что

$$V_n(x,y)W_s(x,y) = x^{\nu+p}y^{\mu+r}V_{n-\mu-\nu}(x,y)W_{s-r-p}(x,y) \qquad (12)$$

и $V_n(0,y) = V_n(x,0) = 0$. Тогда, если выполнены соотношения (10′), (12), $\nu + p,\ \mu + r$ — числа одинаковой четности, в области, ограниченной лучами $[0,+\infty)$ ($x > 0$),$[0,+\infty)$ ($y > 0$) (при $x > 0, y > 0$), и в области, ограниченной лучами $(-\infty,0]$ ($y < 0$),$(-\infty,0]$ ($x < 0$) (при $x < 0, y < 0$), выполнено неравенство $V_n(x,y)W_s(x,y) > 0$; аналогично имеем, что если выполнены соотношения (11′), (12), хотя бы одно из чисел $\nu + p$, $\mu + r$ — нечетное, то в области, ограниченной лучами $[0,+\infty)$ ($x > 0$),$(-\infty,0]$ ($y < 0$) (при $x > 0, y < 0$) при условии, что $\mu + r$ — нечетное число, и в области, ограниченной лучами $(-\infty,0]$ ($x < 0$),$[0,+\infty)$ ($y > 0$) ($x < 0, y > 0$), при условии, что $\nu + p$ — нечетное число, выполнено неравенство $V_n(x,y)W_s(x,y) > 0$. Неустойчивость невозмущенного движения следует из теоремы Четаева. Теорема доказана**.**

Рассмотрим следующий пример.

Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = 6x^3 + y^3 + 9x^2y + 5xy^2,\ \dot{y} = 12x^3 - y^3 + x^2y + 3xy^2 \qquad (13)$$

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V_2(x,y) = 2x^2 - xy - y^2$. Производная функции $V_2(x,y)$ в силу системы (13) определим равенством $\dot{V}_2(x,y) = W_4(x,y) = 12x^4 + 5x^3y + 6x^2y^2 - 6xy^3 + y^4$. При $y = kx$ получим, что $V_2(x,y) = x^2\left(k^2 - k - 2\right)$, $W_4(x,y) = x^4\left(k^4 - 6k^3 + 6k^2 + 5k + 12\right)$. Следовательно, присоединенными многочленами форм $V_2(x,y)$, $W_4(x,y)$ соответственно будут $F\left(V_2,k\right) = -k^2 - k + 2$, $F\left(W_4,k\right) = k^4 - 6k^3 + 6k^2 + 5k + 12$.

Корнями присоединенного многочлена $F\left(V_2,k\right)$ будут числа $k_1=-2$, $k_2=1$ при любом $k\in\left(-2,1\right)$, $F\left(V_2,k\right)>0$. Убедимся, что присоединенный многочлен $F\left(W_4,k\right)$ на сегменте $\left[-2,1\right]$ не имеет корней. Для этой цели воспользуемся методом Штурма определения числа корней $\left[6\right]$, расположенных на сегменте $\left[-2,1\right]$.

Система Штурма для многочлена $F\left(W_4,k\right)$ имеет вид

$$f_0(k)=k^4-6k^3+6k^2+5k+12;$$

$$f_1\left(k\right)=4k^3-18k^2+12k+5;$$

$$f_2\left(k\right)=\frac{15}{4}k^2-\frac{33}{4}k-\frac{111}{8};$$

$$f_3\left(k\right)=-\frac{164}{25}k+\frac{726}{25},\ f_4\left(k\right)=-\frac{621075}{26896},$$

в которой $f_0(k)=F\left(W_4,k\right)$, $f_1(k)=f_0'\left(k\right)$.

Из построенной системы Штурма для многочлена $F\left(W_4,k\right)$ следует, что многочлены $f_0(k)$ и $f_0'\left(k\right)$ являются взаимно простыми. Следовательно, многочлен $F\left(W_4,k\right)$ не имеет кратных корней, кроме того, $F\left(W_4,-2\right)\neq 0$, $F\left(W_4,1\right)\neq 0$.

Символом $\Gamma\left(c\right)$ обозначим число перемен знаков в системе чисел $f_0(c)$, $f_1(c)$, $f_2(c)$, $f_3(c)$, $f_4(c)$, при этом c не является корнем многочлена $f_0(k)$. Тогда по теореме Штурма $\Gamma\left(-2\right)-\Gamma\left(1\right)$ — число действительных корней многочлена $f_0(k)$, принадлежащих интервалу $\left(-2,1\right)$.

Непосредственно путем вычисления убеждаемся, что

$$\Gamma\left(-2\right)-\Gamma\left(1\right)=3-3=0.$$

Это значит, что присоединенный многочлен $F\left(W_4,k\right)$ на сегменте $\left[-2,1\right]$ не имеет корней.

Заметим, что $F\left(W_4,k\right)>0$ при $k\in\left[-2,1\right]$. Следовательно, при любом $x>0$ в области, ограниченной лучами $y=-2x$, $y=x$, на границе которой $V_2\left(x,y\right)=0$, выполняется неравенство $V_2\left(x,y\right)W_4\left(x,y\right)>0$. Невозмущенное движение системы (13) неустойчиво согласно теореме Четаева.

Заключение. На основании вышеизложенного приходим к следующему выводу.

Пусть $V_n\left(x,y\right)$ — форма четного порядка, имеющая присоединенный многочлен $F\left(V_n,k\right)$. Из леммы 2 следует, что форма $V_n\left(x,y\right)$ тогда и только тогда знакоопределенная, когда многочлен $F\left(V_n,k\right)$ не имеет действительных корней.

Пусть числа a и b $\left(a<b\right)$ такие, что при любом $k\notin\left(a,b\right)$ $F\left(V_n,k\right)\neq 0$. Если многочлен $F\left(V_n,k\right)$ имеет кратные корни, то методом Штурма [6] можно найти наибольший общий делитель $\varphi\left(x\right)$ многочленов $F\left(V_n,k\right)$ и $F'\left(V_n,k\right)$ и, следовательно, получить представление $F\left(V_n,k\right)=f_0\left(k\right)\varphi\left(k\right)$, в котором $f_0\left(k\right)$ — многочлен, имеющий такие и только такие корни, какие имеет многочлен $F\left(V_n,k\right)$, но только первой кратности.

Пользуясь методом Штурма, построим систему многочленов

$$f_0\left(k\right),f_1\left(k\right),...,f_s\left(k\right), \tag{14}$$

в которой $f_1\left(k\right)=f_0'\left(k\right)$, $f_s\left(k\right)$ — неравное нулю действительное число.

Пусть $\Gamma\left(a\right)$ ($\Gamma\left(b\right)$) — число перемен знаков в системе (14) при $k=a$ ($k=b$). Тогда, согласно теореме Штурма, $\Gamma\left(a\right)-\Gamma\left(b\right)$ — число корней многочлена $f_0\left(k\right)$, следовательно и многочлена $F\left(V_n,k\right)$, принадлежащих интервалу $\left(a,b\right)$. Из определения чисел a и b следует, что $\Gamma\left(a\right)-\Gamma\left(b\right)$ есть число всех корней многочлена $F\left(V_n,k\right)$, принадлежащих интервалу $\left(-\infty,+\infty\right)$. Отсюда следует, что если $\Gamma\left(a\right)-\Gamma\left(b\right)=0$, то многочлен $F\left(V_n,k\right)$ не имеет действительных корней.

Таким образом, приходим к выводу, который сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Для того чтобы форма $V_n(x, y)$ была знакоопределенной, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma(a) - \Gamma(b) = 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости [Текст] : моногр. — М. : Наука, 1964. — 720 с.
2. Красовский, Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения [Текст] : моногр. — М. : Физматгиз, 1969. — 211 с.
3. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] : моногр. — М. : Физматгиз, 1959. — 431 с.
4. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения [Текст] : моногр. — Л. : Гостехиздат, 1950. — 471 с.
5. Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения [Текст] : моногр. — М. : Наука, 1966. — 530 с.
6. Терехин, М.Т. Исследование одного критического случая в задаче об устойчивости движения [Текст] // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2001. — № 4. — С. 108–119.

REFERENCES

1. Demidovich, B.P. Lektsii po matematicheskoj teorii ustojchivosti [Text] [Lectures on mathematical stability theory] : Monogr. — M. : Science, 1964. — 720 p.
2. Krasovskij, N.N. Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya [Text] [Some problems of the theory of stability of motion] : Monogr. — M. : Fizmatgiz, 1969. — 211 p.
3. Kurosh, A.G. Kurs vysshej algebry [Text] [The course of higher algebra] : Monogr. — M. : Fizmatgiz, 1959. — 431 p.
4. Lyapunov, A.M. Obshhaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya [Text] [The general problem of stability of movement] : Monogr. — L. : Gostekhizdat, 1950. — 471 p.
5. Malkin, I.G. Teoriya ustojchivosti dvizheniya [Text] [Theory of stability of motion] : Monogr. — M. : Science, 1966. — 530 p.
6. Terekhin, M.T. Issledovanie odnogo kriticheskogo sluchaya v zadache ob ustojchivosti dvizheniya [Text] [Study of one critical case in the problem of stability of motion] / M.T. Terekhin // Izvestiya RAEN. Differentsial'nye uravneniya. — News of Russian Academy of natural sciences. Differential equations. — 2001. — N 4. — P. 108–119.

M.T. Terekhin, E.M. Fulina

THE STABILITY OF THE UNPERTURBED MOTION IN CRITICAL CASES

The paper investigates the stability of the unperturbed motion of second order differential equations with the zero solution of the linear approximation system. The investigations rest on

Lyapunov's theorems of stability, instability, and asymptotic stability of unperturbed motion and on Chataev's theorem.

The theorems of stability and instability are proved on the basis of the following concepts: the adjoint polynomial, the pseudo root of the adjoint polynomial.

The paper investigates the relationship of the roots of the adjoint polynomials $V_n(x, y)$ and their derivatives to define the stability and instability of the unperturbed motion. The theory is used to analyze a differential equation. The solution of Sturm is used to define the relationship of the roots of the adjoint polynomials.

Sturm's method, adjoint polynomial, derivative, pseudo-root of the adjoint polynomial, number of alterations, even and odd numbers.