УДК 330.115

М.Т. Терёхин, Е.В. Шуварикова

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ МНОГОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА

Исследовать и, следовательно, предположить методы решения экономических проблем в современном мире невозможно без использования математических методов, основным из которых является метод математического моделирования.

Задача математического моделирования экономических процессов состоит в том, чтобы исследование экономических проблем свести к исследованию математических объектов (моделей), результаты которого с достаточной уверенностью характеризовали бы состояние экономической системы в любой момент времени.

В настоящее время наиболее эффективными математическими моделями являются системы дифференциальных уравнений [1–6].

вектор, декартово произведение пространств, начальный объем, образ и прообраз мно-жества, плановое задание, пустое множество, ранг матрицы, эффективное развитие экономической системы.

Поскольку проблема развития экономической системы в общем случае не является локальной, то наиболее распространенной математической моделью для исследования экономических процессов является достаточно полно изученная система линейных дифференциальных уравнений.

1. В статье рассматривается математическая модель развития экономической системы вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \tag{1}$$

в которой x –-мерный вектор, $u - m$-мерный вектор – управление, $A(t), B(t)$ – матрицы, непрерывные на сегменте $[0, T], T > 0$ – некоторое число, $f(t)$ – непрерывная на сегменте $[0, T]$ n-мерная вектор-функция.

Введем следующие обозначения: $|a| = \max_i\{|a_i|\}, a \in E_s, D^{(0)} \subset E_n, U_0 \subset E_m$ – замкнутые, ограниченные множества, E_k –k-мерное векторное пространство, $M \times N$ – декартово произведение множеств M и N.

При любом $\gamma \in D^{(0)}$ и при любом $u \in U_0$ решение модели (1) представим равенством

$$x(t) = X(t)\gamma + X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)[B(\tau)u + f(\tau)]d\tau, \tag{2}$$

в котором $X(t)$ – фундаментальная матрица решений модели $\dot{x} = A(t)x, X(0) = E, E$ – единичная матрица, $x(0) = \gamma$.

На множестве решений $x(t)$, удовлетворяющих равенству $x(T) = b, b$ – постоянный известный вектор, определим функционал

$$I(x) = \int_0^T \varphi(t, x)dt, \tag{3}$$

где $\varphi(t, x)$ – заданная и непрерывная на множестве $[0, T] \times E_n$ функция.

Для простоты рассуждений далее будем говорить, что решение $x(t)$ модели (1), определенное равенством (2), есть решение, соответствующее векторам γ и u.

Определение 1. Решение $x_0(t)$ модели (1) назовем решением, доставляющим минимум функционалу (3), если $\int_0^T \varphi\left(t, x_0(t)\right)dt \leq \int_0^T \varphi(t, x(t)dt$ при любом решение $x(t)$ модели (1).

Ставится задача 1: определить условия существования таких векторов $\gamma \in D^{(0)}$, $u \in U_0$, при которых соответствующее им решение $x(t)$ модели (1) удовлетворяло бы равенству $x(T) = b$.

Предположим, что γ – объем производственных фондов, который экономическая системы имеет в момент $t = 0$ (начальный объем), u – объем инвестиционных вложений в экономическую систему (инвестиционный объем), $x(t)$ – объем производственных фондов экономической системы в момент $t \in [0, T]$, b – объем плановых заданий, $D^{(0)}$ – множество начальных объемов, U_0 – множество инвестиционных объемов. Эффективность развития экономической системы определяется функционалом (3) (функционал качества).

Экономическая задача (задача 2) ставится так: найти начальный объем $\gamma_0 \in D^{(0)}$, инвестиционный объем $u_0 \in U_0$ такие, чтобы экономическая система, развитие которой определяется решением $x_0(t)$ модели (1), соответствующим векторам γ_0 и u_0, доставляющим минимум функционалу (3), могла бы выполнить задание $x(T) = b$. Далее развитие экономической системы (модель (1)), определенное решением задачи 2 (решением $x_0(t)$), будем называть эффективным развитием экономической системы.

Пусть $\gamma \in D^{(0)}$, $u \in U_0$ – произвольные, но фиксированные векторы. Найдем условия, при которых модель (1) имеет решение $x(t)$, соответствующее векторам γ и u и удовлетворяющее равенству $x(T) = b$, то есть найти условия разрешимости уравнения

$$X(T)\gamma + X(T)\int_0^T X^{-1}(t)[B(t)u + f(t)]dt = b,$$

которое может быть записано в виде

$$\mu = Ru, \tag{4}$$

где

$$\mu = \gamma + \int_0^T X^{-1}(t)f(t)dt - X^{-1}(T)b, \tag{5}$$

$$R = -R(T), R(t) = -\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Следовательно, модель (1) тогда и только тогда будет иметь решение $x(t)$, удовлетворяющее равенству $x(T) = b$ (решение задачи 1), когда векторы μ и u, определяющие решение $x(t)$, будут являться решением уравнения (4).

Множество D_0 определим равенством

$$D_0 = \left\{\mu : \mu = \gamma + \int_0^T X^{-1}(t)f(t)dt - X^{-1}(T)b\right\}. \tag{6}$$

Очевидно, что множество D_0 замкнутое и ограниченное.

Найдем условия разрешимости уравнения (4). Равенство (4) можно рассматривать как отображение, определенное матрицей R, множества U_0 в пространство E_n. Символом RU_0 обозначим образ множества U_0 при этом отображении, символом D_1 – множество, определенное равенством $D_1 = RU_0 \cap D_0$. Следовательно, если $D_1 = \emptyset, \emptyset$ – пустое множество, то уравнение (4) не разрешимо на множестве $D_0 \times U_0$. Это значит, что множества начальных объемов $D^{(0)}$ и объемов инвестиций U_0 не могут обеспечить выполнение планового задания $x(T) = b$.

Поэтому далее будем предполагать, что $D_1 \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующие случаи.

1.1. Пусть $m = n, \det R \neq 0$. Тогда любой вектор $\mu \in D_1$ определяет решение $x(t)$ модели (1), в котором $u = R^{-1}\mu$. Функционал (3), определенный на этом решении, представляет функцию $\overline{I(\mu)}$, непрерывную на замкнутом, ограниченном множестве D_1, достигающую по теореме Вейерштрасса на этом множестве наименьшего значения в некоторой точке μ_0. Следовательно, решение $x_0(t)$ модели (1), доставляющее минимум функционалу (4), соответствует векторам γ_0 и u_0, определенным равенствами

$$\gamma_0 = \mu_0 - \int_0^T X^{-1}(t)f(t)dt + X^{-1}(T)b, u_0 = R^{-1}\mu_0 .$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть $m = n, \det R \neq 0$. Тогда если $D_1 \neq \emptyset$, то существуют начальный объем $\gamma_0 \in D_0$ и объем инвестиций $u_0 \in U_0$ такие, что соответствующее им решение $x_0(t)$ модели (1) определяет эффективное развитие экономической системы.

1.2. Предположим, что $m < n, rang\, R = r, 0 < r \leq m$ (случай, когда $m = n$ и $0 < r < m$, рассматривается аналогично). Для определенности положим, что минор порядка r, отличный от нуля, расположен в верхнем левом углу матрицы R. Тогда элементарными преобразованиями уравнение (4) можно свести к выражениям

$$R_1 u = \mu^{(1)}, 0 \sim C\mu^{(1)} + \mu^{(2)},$$

в которых $R_1 - r \times m$ – матрица $rangR_1 = r, \mu^{(1)} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$, $\mu^{(2)} = (\mu, \quad \mu_{r+2},) \dots, \mu_n), C - (m - r) \times r$– известная постоянная матрица.

Множество D_2 определим равенством $D_2 = \{\mu \in D_1 : C\mu^{(1)} + \mu^{(2)} = 0\}$, множество U_2 определим как прообраз множества D_2 согласно преобразованию, определенному матрицей R. Матрицу R_1 представим так: $R_1 = [\, R_{11} R_{12}], R_{11} - r \times r$ – матрица, $\det R_{11} \neq 0$, $R_{12} - r \times (m - r)$ – матрица. Тогда зависимость между векторами $\mu \in D_2$, $u \in U_2$, удовлетворяющими уравнению (4), определится равенствами

$$u^{(1)} = R_{11}^{-1}\left(\mu^{(1)} + R_{12} u^{(2)}\right),\ \mu^{(2)} = -C\mu^{(1)}, \tag{7}$$

в которых $u^{(1)} = (u_1, u_2, \dots, u_r), u^{(2)} = (u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m)$.

Учитывая, что

$$u = (R^{-1}\left(\mu^{(1)} + R_{12} u^{(2)}, u^{(2)}\right), \tag{8}$$

$$\gamma^{(1)} = \mu^{(1)} - \int_0^T P_1(t) f(t) dt + P_1(T) b,$$

$$\gamma^{(2)} = \mu^{(2)} - \int_0^T P_2(t) f(t) dt + P_2(T) b, \tag{9}$$

где $\gamma^{(1)} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$, $\gamma^{(2)} = (\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_n)$, $\gamma = \left(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\right)$, $X^{-1}(t) = colon \left(P_1(t), P_2(t)\right)$, $P_1(t) - r \times n$, $P_2(t) - (n - r) \times n$– матрицы, получим, что решение $x(t)$ модели (1), соответствующее векторам γ и u, определенными равенствами (8) и (9), будет удовлетворять равенству $x(T) = b$ и зависеть от вектора $(\mu^{(1)}, u^{(2)}) \in M, M$ – множество, определенное равенством

$$M = M_1 \times M_2, M_1 = \{\mu^{(1)}\}, M_2 = \{u^{(2)}\},$$

при этом $\left(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}\right) \in D_2, (u^{(1)}, u^{(2)}) \in U_2$.

Функционал (3), вычисленный на решении $x(t)$, является функцией $I^*(\mu^{(1)}, u^{(2)})$, непрерывной на замкнутом, ограниченном множестве M и, следовательно, достигающей на этом множестве наименьшее значение в некоторой точке $(\mu_0^{(1)}, u_0^{(2)})$ согласно теореме Вейерштрасса.

Решение $x_0(t)$ модели (1), которое доставляет минимум функционалу (3), определяется равенством

$$x_0(t) = X(t)\gamma_0 + X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau)[B(\tau) u_0 + f(\tau)] d\tau,$$

где γ_0 и u_0 удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_0 = \mu_0 - \int_0^T X^{-1}(t) f(t) dt + X^{-1}(T) b,$$

$$u_0 = R_{11}^{-1}\left(\mu_0^{(1)} + R_{12} u_0^{(2)}, u_0^{(2)}\right), \mu_0 = (\mu_0^{(1)}, -C\mu_0^{(1)}).$$

Итак, справедлива

Теорема 2. Пусть $rang\ R = r$, выполнено одно из следующих условий

$$i_1)\ m < n, 0 < r \le m,$$
$$i_2)\ m = n, 0 < r < m.$$

Тогда если $D_1 \neq \emptyset$, существуют -мерный вектор $\mu^{(1)}$, $n-r$-мерный вектор $\mu^{(2)}$, $\mu = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)}) \in D_1$ и элементарное преобразование уравнения (3) в систему равенств $R_1 u = \mu^{(1)}, C\mu^{(1)} + \mu^{(2)} = 0, rang R_1 = r, C$ – постоянная матрица, то существуют начальный объем $\gamma_0 \in D_0$ и инвестиционный объем $u_0 \in U_0$ такие, что соответствующее им решение модели (1) определяет эффективное развитие экономической системы.

Таким образом, получены условия (теоремы 1, 2) разрешимости задач 1, 2.

2. Изложенную в пункте 1 теорию применим к нахождению условий развития экономической системы, математическая модель которой имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t), \tag{10}$$

где x – двумерный вектор, $A(t)$ – матрица 2×2, $B(t)$ – матрица 2×m, u – m-мерный вектор – управление , $f(t)$ – двумерная вектор-функция, $m \in \{1; 2\}$.

Как и в пункте 1, предположим, что матрицы $A(t), B(t)$ и вектор-функция $f(t)$ непрерывны на сегменте $[0, T]$, функционал качества определяется равенством (3), в котором $\varphi(t, x)$ – непрерывная на множестве $[0, T] \times E_2$ функция.

Аналогично, как и в пункте 1, определим множество $D^{(0)}$ с учетом того, что $n = 2$, множество $U_0^{(m)}$ определим равенством $U_0^{(m)} = \{u \in E_m : |u| \le q\}, q > 0$ – некоторое число.

Исследуем проблему разрешимости задачи 1 и 2 для модели (10), в частности найдем условия существования векторов $\gamma_0 \in D^{(0)}$, $u_0 \in U_0^{(m)}$ таких, чтобы соответствующее им решение $x_0(t)$ модели (10) удовлетворяло равенству $x_0(T) = b$, доставляло минимум функционалу (3) и, следовательно, определяло эффективное развитие экономической системы. Для этого найдем условия разрешимости уравнения

$$\mu = Ru, \tag{11}$$

построенного для модели (10) методом, изложенным в пункте 1, $\mu = (\alpha, \beta)$.

Множество D_0 определим согласно равенству (6) (с учетом того, что $n = 2$) и будем предполагать, что множество $D^{(0)}$ таково, что отображением (6) оно преобразуется во множество D_0, ограниченное прямыми $\beta = k_1\alpha, \beta = k_2\alpha$, где $0 < k_1 < k_2 < \infty$,

$$\frac{\alpha}{a_1} + \frac{\beta}{b_1} = 1\ (\mathrm{A}_1),\ \frac{\alpha}{a_2} + \frac{\beta}{b_2} = 1, (\mathrm{A}_2),$$

где $0 < a_1 < a_2 < \infty$ и $0 < b_1 < b_2 < \infty$ (рис. 1).

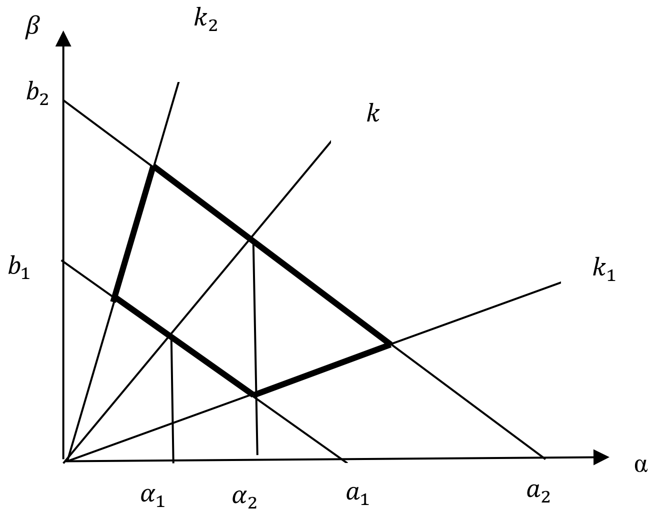

Рис. 1. Множество D_0

2.1. Пусть $m = 1$. Матрица R примет вид $R = colon\,(r_{11}, r_{21})$. Следовательно, равенство (11) можно представить в виде

$$\alpha = r_{11}u, \beta = r_{21}u. \tag{12}$$

Из равенства (12) следует, что $\beta = k\alpha$, где $k = \frac{r_{21}}{r_{11}}$ (для определенности предполагаем, что $r_{11} \neq 0$). Тогда, если $k \overline{\in} [k_1, k_2]$, то множество $\{(\alpha,\beta): \beta = k\alpha\} \cap D_0 = \emptyset$. Это значит, что во множестве $D_0 \times U_0^{(1)}$ уравнение (11) не разрешимо, экономическая система (модель (10)) при любом начальном объеме $\gamma \in D^{(0)}$ и любом объеме инвестиций $u \in U_0^{(1)}$ не может обеспечить выполнение планового задания.

Поэтому далее будем предполагать, что $k \in [k_1, k_2]$. Пусть α_1, α_2 – абсциссы точек пересечения прямой $\beta = k\alpha$ соответственно с прямыми (A_1), (A_2). Следовательно, любое $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и только оно посредством равенства $\beta = k\alpha$ определяет β такое, что точка $(\alpha, \beta) \in D_0$.

Заметим, что из того, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, следует что $r_{11}r_{21} > 0$. Поэтому для определенности положим, что $r_{11} > 0, r_{21} > 0$, тогда и $u > 0$. Следовательно, в качестве множества U_0 достаточно рассматривать множество $U_0^* = [0, q]$.

Равенство $\alpha = r_{11}u$ можно рассматривать как отображение φ множества U_0^* во множество $[0, \infty)$. Символом φU_0^* обозначим образ множества U_0^* при отображении φ. Очевидно, что $\varphi U_0^* \subset [0, r_{11}q]$. Следовательно, если $r_{11}q < \alpha_1$, то равенство (10) неразрешимо во множестве $[D_0 \times U_0^*]$, экономическая система (модель (10)) при любом начальном $\gamma \in D_0$ и любом объеме инвестиций $u_0 \in U_0^*$ не может обеспечить выполнение планового задания.

Пусть $\alpha_1 \leq r_{11}q$. Множество D_0^* определим равенством $D_0^* = \varphi U_0^* \cap [\alpha_1, \alpha_2] = [\alpha_1, \min\{r_{11}q, \alpha_2\}]$. Тогда, учитывая, что $\alpha = r_{11}u$, получим, что прообразом множества D_0^* при отображении φ является множество $U_1 = \left[\frac{\alpha_1}{r_{11}}, \frac{\min\{r_{11}q, \alpha_2\}}{r_{11}}\right] \subset [0, q]$. Таким образом, приходим к выводу о том, что на множестве $D_0 \times U_0^*$ (следовательно, и на множестве $D_0 \times U_0$) задача 1 разрешима.

Выберем произвольное $u \in U_1$. Тогда получим, что $\alpha = r_{11}u, \beta = r_{21}u, \mu = (r_{11}u, r_{21}u)$; γ определим согласно равенству (5). Функционал (3), вычисленный на множестве решений $x(t)$ модели (10), соответствующим векторам γ и u, будет представлять функцию $I_1(u)$, непрерывную на множестве U_1. Это значит, что согласно теореме Вейерштрасса на множестве U_1 существует точка u_0, в которой функция $I_1(u)$ принимает наименьшее значение.

Полагая $\alpha_0 = r_{11}u_0, \beta_0 = r_{21}u_0, \mu_0 = (\alpha_0, \beta_0), \gamma_0$ определенным равенством (5) при $\mu = \mu_0$, получим, что решением модели (10), доставляющим минимум функционалу (3), является вектор-функция $x_0(t)$, соответствующая векторам γ_0 и u_0. Это значит, что существует начальный объем $\gamma_0 \in D_0$, объем инвестиций $u_0 \in U_0^*$, что соответствующее им решение $x_0(t)$ модели (10) определяет эффективное развитие экономической системы. Задача 2 решена.

2.2. Пусть $m = 2$.

2.2.1. Предположим, что $detR \neq 0$. Тогда матрица R определяет отображение множества $U_0^{(2)}$ в пространство E_2, $RU_0^{(2)}$ – образ множества $U_0^{(2)}$ при этом отображении.

Пусть $D_1 = RU_0^{(2)} \cap D_0$. Если $D_1 = \emptyset$, то уравнение (11) не разрешимо на множестве $D_0 \times U_0^{(2)}$, экономическая система (модель (10)) при любом начальном объеме $\gamma \in D^{(0)}$ и любом объеме инвестиций $u \in U_0^{(2)}$ не может обеспечить выполнение планового задания.

Предположим, что $D_1 \neq \emptyset$. Тогда существует не пустое множество $U_1^{(2)} \subseteq U_0^{(2)}$, удовлетворяющее равенству $U_1^{(2)} = R^{-1}D_1$. Следовательно, при любом $\mu \in D_1$ $u = R^{-1}\mu \in U_1^{(2)}$. Это значит, что на множестве $D_1 \times U_1^{(2)}$ задача 1 разрешима, то есть для любого $\mu \in D_1$ $u = R^{-1}\mu$ (γ определено согласно равенству (5)) решение модели (10), соответствующее векторам γ и u, удовлетворяет равенству $x(T) = b$.

Функционал (3), вычисленный на этом решении, представляет функцию $I_2(\mu)$, непрерывную на замкнутом, ограниченном множестве D_1 и, следовательно, согласно теореме Вейерштрасса достигающую на этом множестве наименьшее значение в некоторой точке μ_0. Полагая $u_0 = R^{-1}\mu_0$, определяя γ_0 равенством (5), получим, что решение $x_0(t)$ модели (10), соответствующее векторам γ_0 и u_0, определяет эффективное развитие экономической системы, для которой γ_0 – начальный объем, u_0 – инвестиционный объем. Задача 2 решена.

2.2.2. Пусть $\det R = 0, rang\, R = 1,\ R = (r_{ij})_1^2$. Тогда существует число k, удовлетворяющее равенству $r_{21} = kr_{11}, r_{22} = kr_{12}$ (для определенности положим $r_{11} \neq 0$). Следовательно, необходимым условием разрешимости уравнения (11) является выполнение равенства $\beta = k\alpha$ и включения $k \in [k_1, k_2]$. Для определения условий разрешимости уравнения (11) достаточно рассмотреть уравнение $\alpha = r_{11}u_1 + r_{12}u_2, u = (u_1, u_2)$, при условии, что $\beta = k\alpha$.

Пусть α_1, α_2 – абсциссы точек пересечения прямой $\beta = k\alpha$ соответственно с прямыми $(\mathrm{A}_1), (\mathrm{A}_2)$ (рис. 1). Тогда при любом $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ будем иметь

$$u_1 = \frac{1}{r_{11}}(\alpha - r_{12}u_2). \tag{13}$$

Множество U_2 определим равенством $U_2 = \{u_2 : |u_2| \leq q\}$, множество Q – равенством $Q = \{(\alpha, u_2) : \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2], u_2 \in U_2\}$, множество $U_1^{(0)}$ – равенством $U_1^{(0)} = \{u_1 : |u_1| \leq q\}$.

Равенство (13) определяет отображение множества φ_1 множества Q в пространство E_1. Символом $\varphi_1 Q$ обозначим образ множества Q при отображении φ_1.

Пусть $U_1^* = \varphi_1 Q \cap U_1$. Если $U_1^* = \emptyset$, то уравнение (11) не разрешимо на множестве $D_0 \times U_0^{(2)}$, экономическая система (модель (10)) при любом начальном объеме $\mu \in D_0$, при любом объеме инвестиций $u \in U_0^{(2)}$ не может обеспечить выполнение планового задания.

Предположим, что $U_1^* \neq \emptyset$. Тогда существует множество Q_1 (прообраз множества U_1^* при преобразовании φ_1), удовлетворяющее равенству $U_1^* = \varphi_1 Q_1$. Следовательно, для любой точки $(\alpha, u_2) \in Q_1$ существует единственная точка $u_1 \in U_1^*$ такая, что выполняется равенство (13).

Найдем множество Q_1. С этой целью заметим, что для любой точки $(\alpha, u_2) \in Q_1$ выполнено неравенство $|\frac{1}{r_{11}}(\alpha - r_{12}u_2)| \leq q$ или все равно, что неравенства $-|r_{11}|q \leq \alpha - r_{12}u_2 \leq |r_{11}|q$. Следовательно, множество Q_1 принадлежит множеству P, ограниченному прямыми $\alpha = r_{12}u_2 - |r_{11}|q, \alpha = r_{12}u_2 + |r_{11}|q$, то есть $Q_1 \subseteq P \cap Q$ (рис. 2). Это значит, что на множестве $D_0 \times U_0$ задача 1 разрешима.

Функционал (3), вычисленный на решении $x(t)$ модели (10), соответствующем векторам $\gamma, u = (u_1, u_2), u_1 = \frac{1}{r_{11}}(\alpha - r_{12}u_2)$ (вектор γ определен равенством (5), $\mu = (\alpha, k\alpha)$), представляет функцию $I_3(\alpha, u_2)$, непрерывную на замкнутом, ограниченном множестве Q_1. Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса существует точка $(\alpha_0, u_{0_2}) \in Q_1$, в которой функция $I_3(\alpha, u_2)$ принимает наименьшее значение. Полагая $\beta_0 = k\alpha_0, \mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$, вектора γ_0 определенным равенством (5) при $\mu = \mu_0$, $u_0 = (u_{10}, u_{20}), u_{10} = \frac{1}{r_{11}}(\alpha_0 - r_{12}u_{20})$, получим, что решением модели (10), доставляющим минимум функционалу (3) на множестве $D_0 \times U_0^{(2)}$, является вектор-функция $x_0(t)$ $(x_0(T) = b)$, соответствующая векторам γ_0 и u_0. Это значит, вектор-функция $x_0(t)$ определяет эффективное развитие экономической системы (модель (10)), начальный объем и объем инвестиций которой соответственно равны γ_0 и u_0. Задача 2 решена.

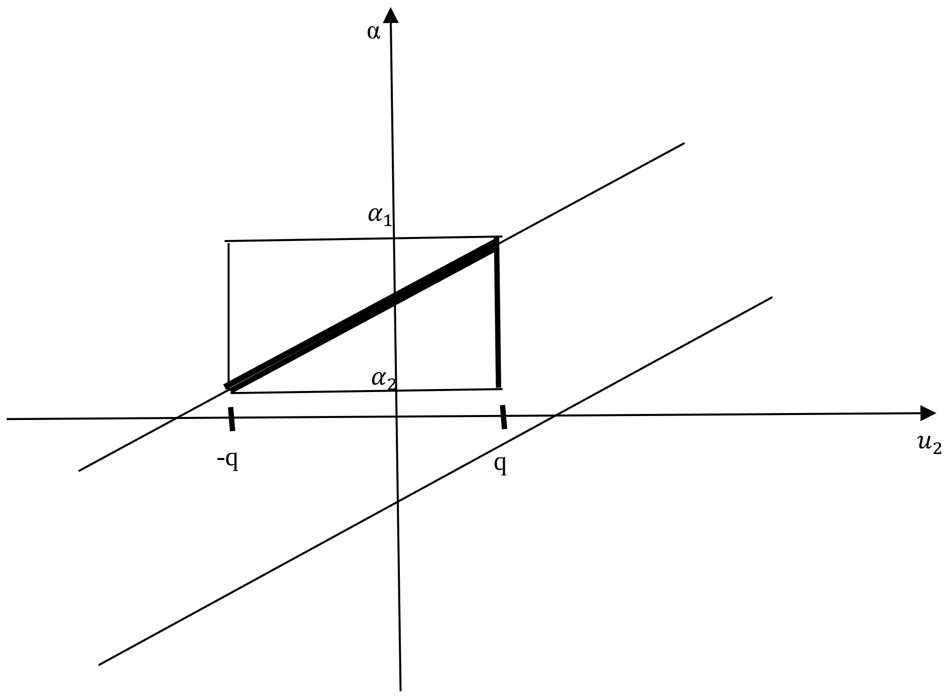

Рис. 2. Множество $P \cap Q \supseteq Q_1(r_{12} > 0)$

Пример. Предположим, что развитие экономической системы определяется математической моделью

$$\dot{x} = Bu + f, \tag{14}$$

в которой x – двумерный вектор, $B = colon(-2;-4), f = colon(4,3), u$ – управление.

Множество $U_0^{(1)}$ инвестиционных объемов определим равенством $U_0^{(1)} = \{u: |u| \leq 3\}$, функционал качества – равенством

$$I(x) = \int_0^1 xSxdt, \tag{15}$$

в котором S – матрица вида $S = [colon(2,0), colon\ (0,2)], b = (2,2)$ – объем плановых заданий. В качестве множества D_0 выберем множество, ограниченное прямыми $\beta = \alpha, \beta = 3\alpha, \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = 1\ (\mathrm{A}_1), \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} = 1(\mathrm{A}_2)$.

Найдем условия разрешимости задач 1, 2 модели (14).

Решение системы (14) запишется так:

$$x_1(t) = \gamma_1 - 2tu + 4t, x_2(t) = \gamma_2 - 4tu + 3t. \tag{16}$$

Следовательно, при $t = 1\ x_1(1) = \gamma_1 - 2u + 4, x_2(1) = \gamma_2 - 4u + 3$. С учетом того, что $x_1(1) = 2, x_2(1) = 2$, вычислением устанавливаем, что равенство (5) принимает вид

$$\alpha = \gamma_1 + 2, \beta = \gamma_2 + 1, \mu = (\alpha, \beta). \tag{17}$$

Матрица $R = colon(2,4)$. Система (12) для модели (14) запишется так:

$$\alpha = 2u, \beta = 4u. \tag{18}$$

Вычислением устанавливаем, что $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ – абсциссы точек пересечения прямой $\beta = 2\alpha$ соответственно с прямыми $(\mathrm{A}_1), (\mathrm{A}_2)$(рис. 1). Отсюда следует, что точка (α, β) тогда и только тогда принадлежит множеству D_0, когда $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Поэтому, учитывая, что $\alpha = 2u$, получим, что вместо множества U_0 достаточно рассмотреть множество $U_0^* = [0,3]$. Таким образом, решение системы (18) следует искать во множестве $[\alpha_1, \alpha_2] \times [0,3]$.

Равенство $\alpha = 2u$ будем рассматривать как отображение φ_2 множества $[0,3]$ во множество $[0, \infty)$. Очевидно, что $\varphi_2 U_0^* \subset [0,6]$ и $D_0^* = \varphi_2 U_0^* \cap [1,2] = [1,2]$. Тогда прообразом множества D_0^* будет множество $U_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset [0,3]$. Это значит, что на множестве $D_0 \times U_0^{(1)}$ задача 1 разрешима.

Выберем произвольное $u \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тогда $\alpha = 2u$, $\beta = 4u$, $\mu = (2u, 4u), \gamma = (2u - 2, 4u - 1)$. Решение $x(t)$ модели (14), соответствующее вектору $(2u - 2, 4u - 1)$ и переменной u, то есть переменной $u \in [\frac{1}{2}, 1]$, запишется так:

$$x_1(t) = 2u - 2 - 2tu + 4t, x_2(t) = 4u - 1 - 4tu + 3t. \qquad (19)$$

Функционал (15), вычисленный на решении (19), представляет функцию $I_*(u)$, определенную равенством $I_*(u) = \frac{40}{3}u^2 - \frac{8}{3}u + \frac{14}{3}$ и строго монотонно возрастающую на сегменте $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Следовательно, наименьшее значение на множестве $D_0 \times U_0^{(1)}$, равное $\frac{20}{3}$, функция $I_*(u)$ достигает в точке $u_0 = \frac{1}{2}$. Это значит, что решение $x_0(t)$, доставляющее минимум функционалу, равный $\frac{20}{3}$, определяется равенствами

$$x_{10}(t) = -1 + 3t, x_{20}(t) = 1 + t.$$

Итак, приходим к выводу: решение $x_0(t) = (x_{10}(t), x_{20}(t))$ определяет эффективное развитие экономической системы (модель (14)). Задача 2 решена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замков, О.О. Математические модели в экономике [Текст] : учеб. / О.О. Замков, Ю.А. Черемных, А.В. Толстопятенко. – М. : Дело и сервис, 1999. – 368 с.
2. Колемаев, В.А. Математическая экономика [Текст] : учеб. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
3. Красс, М.С. Математические методы и модели для магистрантов экономики [Текст] : учеб. / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2006. – 496 с.
4. Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика [Текст] : моногр. – М. : Мир, 1972. – 514 с.
5. Терёхин, М.Т. Двухточечная краевая задача управляемой математической модели стабильного развития экономической системы в условиях внешних воздействий [Текст] // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2015. – № 3. – С. 71–76.
6. Терёхин, М.Т. Математическая модель многоотраслевой экономической системы с функционалом издержек [Текст] // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2017. – № 3. – С. 115–118.

REFERENCES

1. Zamkov, O.O. Matematicheskie modeli v ehkonomike [Text] : ucheb. / O.O. Zamkov, Yu.A. Cheremnyh, A.V. Tolstopyatenko. – M. : Delo i servis, 1999. – 368 s.
2. Kolemaev, V.A. Matematicheskaya ehkonomika [Text] : ucheb. – M. : YUNITI, 1998. – 240 s.
3. Krass, M.S. Matematicheskie metody i modeli dlya magistrantov ehkonomiki [Text] : ucheb. / M.S. Krass, B.P. Chuprynov. – SPb. : Piter, 2006. – 496 s.
4. Nikajdo, H. Vypuklye struktury i matematicheskaya ehkonomika [Text] : monogr. – M. : Mir, 1972. – 514 s.
5. Teryohin, M.T. Dvuhtochechnaya kraevaya zadacha upravlyaemoj matematicheskoj modeli stabil'nogo razvitiya ehkonomicheskoj sistemy v usloviyah vneshnih vozdejstvij [Text] // Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta. – 2015. – N 3. – S. 71–76.
6. Teryohin, M.T. Matematicheskaya model' mnogootraslevoj ehkonomicheskoj sistemy s funkcionalom izderzhek [Text] // Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta. – 2017. – N 3. – S. 115–118.

M.T. Terekhin, E.V. Shuvarikova

A RESEARCH OF A MATHEMATICAL MODEL OF A MULTISECTORAL ECONOMIC SYSTEM WITH A QUALITY FUNCTIONAL

Economic issues can nowadays be properly investigated and solved only by means of mathematical modeling, a key mathematical method. Mathematical modeling of economic processes allows one to investigate economic issues as economic models describing economic systems. The most effective mathematical models are differential equations [1–6].

vector, Cartesian product of space, initial space, image and preimage, planned task, vacant set, matrix rank, economic system effective development.